

# İçindekiler

Preface	ix
<b>1 Kaynakça ve Ön Bilgiler</b>	<b>1</b>
<b>2 Lineer Denklem Sistemleri</b>	<b>5</b>
2.1 Matrisler . . . . .	5
2.1.1 Tanımlar ve gösterimler . . . . .	5
2.1.2 Matrislerde toplama ve skalerle çarpma işlemi . . . . .	8
2.1.3 Matrislerde çarpma işlemi . . . . .	12
2.1.4 Bir matrisin transpozu . . . . .	14
2.1.5 Kare matrisler . . . . .	16
2.1.6 Bir matrisin çarpma işlemine göre tersi . . . . .	19
2.1.7 Bir matrisin eşolon formu . . . . .	23
2.1.8 Elemanter operasyonlar . . . . .	26
2.1.9 Elemanter operasyonların uygulamaları . . . . .	30
2.1.10 Bölüm sonu alıştırmaları . . . . .	33
2.2 Determinantlar . . . . .	37
2.2.1 Determinant fonksiyonu ve özellikleri . . . . .	37
2.2.2 Determinant açılımları . . . . .	41
2.2.3 Bir matrisin adjointi (eki) . . . . .	43
2.2.4 Bir matrisin determinant rankı . . . . .	46
2.2.5 Bölüm sonu alıştırmaları . . . . .	47
2.3 Lineer denklem sistemleri . . . . .	50
2.3.1 Katsayılar matrisinin tersi yardımıyla lineer denklem sisteminin çözümü . . . . .	53
2.3.2 Gauss ve Gauss-Jordan yoketme metotları . . . . .	55
2.3.3 Homojen lineer denklem sistemi . . . . .	60
2.3.4 Cramer denklem sistemleri . . . . .	63

2.3.5	Bölüm sonu alıştırmaları . . . . .	66
<b>3</b>	<b>Vektör Uzayları</b>	<b>71</b>
3.1	Düzlemde vektörler . . . . .	71
3.1.1	Bölüm sonu alıştırmaları . . . . .	74
3.2	Reel vektör uzayları . . . . .	74
3.2.1	Altuzaylar . . . . .	76
3.2.2	Lineer bağımlılık-bağımsızlık . . . . .	79
3.2.3	Baz ve boyut . . . . .	83
3.2.4	Skaler (İç) çarpım . . . . .	85
3.2.5	Bölüm sonu alıştırmaları . . . . .	92
3.3	Kompleks vektör uzayları . . . . .	96
3.3.1	Bölüm sonu alıştırmaları . . . . .	97
3.4	Lineer dönüşümler ve matrisler . . . . .	98
3.4.1	Lineer dönüşümler . . . . .	98
3.4.2	Bir lineer dönüşümün matrisi . . . . .	103
3.4.3	Öz değerler ve öz vektörler . . . . .	105
3.4.4	Bölüm sonu alıştırmaları . . . . .	115

## Preface



# Bölüm 1

## Kaynakça ve Ön Bilgiler

### Kaynakça

Bu ders notu hazırlanırken aşağıdaki kaynaklardan faydalanılmıştır.

1. R.A. Beezer, A First Course in Linear Algebra, Congruent Press, 2016.
2. H. Bilgiç, Lineer Cebir Ders Notları, Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, 2015.
3. H.H. Hacısalihoglu, Lineer Cebir, Fırat Üniversitesi Basımevi, 1975.
4. S. Lipshutz, M.L. Lipson, Linear Algebra, Schaum's Outline Series, The McGraw-Hill Companies, 2009.
5. A. Sabuncuoğlu, Lineer Cebir, Nobel Akademik Yayıncılık, 2011.
6. S. Yüce, Lineer Cebir, Pegem Yayıncılık, 2015.

Bu kaynakların kıymetli yazarları olan **H. Hilmi Hacısalihoglu**, **Arif Sabuncuoğlu**, **Hüseyin Bilgiç**, **Salim Yüce**, **Seymour Lipshutz**, **M. Lars Lipson**, **Robert A. Beezer** hocalarımıza teşekkürlerimizi sunarız.

### Ön Bilgiler

Bu ders notu boyunca aşağıdaki gösterimler kullanılacaktır:

1.  $\mathbb{N}$  ile doğal sayılar kümesi;
2.  $\mathbb{Z}$  ile tam sayılar kümesi;
3.  $\mathbb{R}$  ile reel sayılar kümesi;
4.  $\mathbb{C}$  ile kompleks sayılar kümesi;
5.  $a, b, c, \dots$  ile reel ya da kompleks skalerler;
6.  $\alpha$  (alfa),  $\beta$  (beta),  $\gamma$  (gama),  $\delta$  (delta),  $\epsilon$  (epsilon),  $\varepsilon$  (varepsilon),  $\zeta$  (zeta),  $\eta$  (eta),  $\theta$  (teta),  $\lambda$  (lamda),  $\xi$  (ksi),  $\pi$  (pi),  $\rho$  (ro),  $\sigma$  (sigma),  $\phi$  (fi),  $\varphi$  (varfi), ... gibi (küçük) Yunan harfleri ile vektörlerin yanı sıra matrislerin satır veya sütunları;
7.  $A, B, C, I, \dots$  ile matrisler;
8.  $\det A$  ile  $A$  matrisinin determinantı;
9.  $x, y, z, \dots$  ile yalnızca üç boyut için bilinmeyen, değişken ya da koordinat fonksiyonları;
10.  $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots$  ile yüksek boyutlarda bilinmeyen, değişken ya da koordinat fonksiyonları;
11.  $\mathbb{U}, \mathbb{V}, \mathbb{W}, \dots$  ile vektör uzayları gösterilecektir.

### Aritmetik İşlemler

$$a(b + c) = ab + ac, \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}, \quad \frac{a/b}{c/d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

### İşaret Kuralları

$$-(-a) = a, \quad \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b} = \frac{a}{-b}$$

**Sıfır** Sıfır ile bölme tanımlı değildir.

$$a \neq 0 \text{ ise } \frac{0}{a} = 0, a^0 = 1, 0^a = 0$$

**Binom Teoremi** Herhangi bir pozitif  $n$  sayısı için

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^{n-3}b^3 + \dots + nab^{n-1} + b^n$$

Örneğin,

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

**$n > 1$ , Tamsayıların Kuvvetlerinin Farkları**

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Örneğin,

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$$

**Polinom Fonksiyonu**

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

şeklinde tanımlı fonksiyona *polinom*;  $n$  sayısına polinomun *derecesi*;  $a_n$  katsayısına polinomun *başkatsayısı* denir. Burada  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  katsayıları reel ya da kompleks skalerlerdir.

**Toplam ( $\sum$ ) ve Çarpım ( $\prod$ ) Sembolleri**

$i = 1, 2, \dots, n \in \mathbb{N}$  ve  $a_i$  değerleri reel ya da kompleks skalerler olmak üzere

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=0}^n a_i,$$

ve

$$a_0.a_1.a_2\dots a_n = \prod_{i=0}^n a_i.$$

### Kompleks Sayılar

Bir *kompleks sayı* reel skalerlerin bir  $(a, b)$  ikilisinden ibarettir. Kompleks sayılar kümesini  $\mathbb{C}$  ile gösterelim. Bu sayılar arasında eşitlik, toplama ve çarpma gibi işlemler

1.  $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c$  ve  $b = d$ ,
2.  $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ ,
3.  $(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

şeklinde tanımlanır. Her  $a$  reel skaleri aynı zamanda bir  $(a, 0)$  kompleks sayıdır.  $(0, 1)$  kompleks sayısı  $\mathbf{i}$  ile gösterilirse

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{i}.\mathbf{i} = (0, 1)(0, 1) = -1$$

ve  $\mathbf{i} = \sqrt{-1}$  bulunur. Herhangi bir  $z = (a, b)$  kompleks sayısı

$$z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0)(0, 1) = a + b\mathbf{i}$$

şeklinde yazılabilir. Burada  $a \equiv \text{Re } z$  ve  $b \equiv \text{Im } z$  olarak ifade edilip  $z$  kompleks sayısının *reel* ve *imajiner* kısımları olarak adlandırılır.

Bir  $z = a + b\mathbf{i}$  kompleks sayısının *eşleniği*

$$\bar{z} = a - b\mathbf{i}$$

şeklinde tanımlanır. Burada  $z\bar{z} = a^2 + b^2$  dir. Ayrıca  $z$  mutlak değeri

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

olup,  $\mathbb{R}^2$  de  $(a, b)$  vektörünün *uzunluğuna* (*normuna*) karşılık gelir (bakınız Bölüm 3.2.4).



# Bölüm 2

## Lineer Denklem Sistemleri

### 2.1 Matrisler

#### 2.1.1 Tanımlar ve gösterimler

**Tanım 2.1.1**  $X = \{1, 2, \dots, m\}$  ve  $Y = \{1, 2, \dots, n\}$  olsun.  $X \times Y$  kartezyen kümesinden reel ya da kompleks sayılar kümesine tanımlı bir fonksiyona  $m \times n$  tipinde ( $m \times n$  biçiminde) bir **matris** denir.  $m \times n$  ye de matrisin **mertebesi** adı verilir.

**Gösterim 2.1.2**  $A : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$  (ya da  $A : X \times Y \longrightarrow \mathbb{C}$ ) fonksiyonunun verilmesi demek her  $(i, j) \in X \times Y$  için  $A(i, j)$  elemanlarının verilmesi demektir.  $A(i, j) = a_{ij}$  diyelim. Bundan sonra  $A$  fonksiyonu

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} \quad (2.1)$$

şeklinde veya kısaca  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  ile gösterilecektir.

**Tanım 2.1.3**  $a_{ij}$  sayılarının her birine  $A$  matrisinin bir **elemanı** denir. Ayrıca

$$a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$$

elemanlarının oluşturduğu yatay sıraya  $A$  matrisinin  $i$ . **satırı** ve

$$a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}$$

elemanlarının oluşturduğu dikey sıraya da  $A$  matrisinin  $j$ . **sütunu** veya **kolonu** denir.

**Uyarı 2.1.4** Elemanları reel ya da kompleks olan  $m \times n$  tipinde bir matris denildiğinde akla (2.1) şeklinde bir tablo gelir. Ayrıca  $A$  matrisinin  $i$ . satırı ve  $j$ . sütunundaki elemanı  $a_{ij}$  ile gösterilir.

### Örnek 2.1.5

$$A = \begin{bmatrix} -1 + i & 3 - 2i & 3 + 3i & 0 & 7i & 0 \\ 1 - i & -3 & 0 & 4 - 3i & 3 - 2i & 0 \\ 0 & -1 + i & -1 & 5 - i & 2 - 6i & 0 \\ -i & 6i & 3 & 0 & -1 + i & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde verilen  $A$  matrisi için:

1. Mertebesi  $4 \times 6$  dir;
2.  $a_{14} = a_{16} = a_{23} = a_{26} = a_{31} = a_{36} = a_{44} = a_{46} = 0$  dir;
3. 6. sütunu sıfırlardan ibarettir;
4.  $a_{11} = -a_{21} = a_{32} = a_{45} = -1 + i$  dir.

**Gösterim 2.1.6** Elemanları reel (ya da kompleks) olan  $m \times n$  tipindeki tüm matrislerin cümlesi  $\mathbb{R}_n^m$  (veya  $\mathbb{C}_n^m$ ) ile gösterilir.

**Tanım 2.1.7** Yalnız bir sütundan oluşan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}_{m \times 1}$$

matrisine **sütun matrisi**; yalnız bir satırdan oluşan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix}_{1 \times n}$$

matrisine ise **satır matrisi** adı verilir.

**Örnek 2.1.8** Aşağıda satır ve sütun matrislerine örnekler verilmiştir:

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{4 \times 1}$$

ve

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 + \mathbf{i} & 1 - \mathbf{i} & 0 & \mathbf{i} \end{bmatrix}_{1 \times 5}.$$

**Tanım 2.1.9**  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  ve  $B = [b_{ij}]_{m \times n}$  matrisleri için eğer her  $i, j$  için

$$a_{ij} = b_{ij}$$

ise  $A$  ve  $B$  matrislerine **eşittir** denir ve  $A = B$  ile gösterilir.

İki matrisin eşit olması için mertebelerinin aynı olması gerektiğine dikkat edilmelidir.

**Örnek 2.1.10**

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{i} \\ 3 - \mathbf{i} & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2}, \quad B = \begin{bmatrix} a - 1 & c \\ b + 2\mathbf{i} & d \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

matrislerinin eşit olması için  $a, b, c, d$  sayılarını bulalım. Buna göre

$$a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1, \quad b + 2\mathbf{i} = 3 - \mathbf{i} \Rightarrow b = 3 - 3\mathbf{i}$$

ve  $c = \mathbf{i}, d = 1$  olur.

### 2.1.2 Matrislerde toplama ve skalerle çarpma işlemi

**Tanım 2.1.11**  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  ve  $B = [b_{ij}]_{m \times n}$  matrislerinin **toplama** bu matrislerin karşılıklı bileşenleri toplanarak elde edilen yeni bir matristir. Yani,

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$$

dir.

Mertebeleri farklı olan matrislerin toplamı tanımlı değildir.

#### Örnek 2.1.12

$$A = \begin{bmatrix} 3 & \mathbf{i} \\ 0 & -2 + \mathbf{i} \\ 4 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 3}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -\mathbf{i} \\ 5 & 2 - \mathbf{i} \\ -4 & -3 + \mathbf{i} \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

matrisleri için

$$A + B = \begin{bmatrix} 3 - 1 & \mathbf{i} - \mathbf{i} \\ 0 + 5 & -2 + \mathbf{i} + 2 - \mathbf{i} \\ 4 - 4 & 3 - 3 + \mathbf{i} \end{bmatrix}_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 0 \\ 0 & \mathbf{i} \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

olur.

**Tanım 2.1.13** Bir  $A = [a_{ij}]_{m \times n} \in \mathbb{R}_n^m$  (veya  $\mathbb{C}_n^m$ ) ve  $c \in \mathbb{R}$  (veya  $\mathbb{C}$ ) olmak üzere  $[ca_{ij}]_{m \times n} \in \mathbb{R}_n^m$  (veya  $\mathbb{C}_n^m$ ) matrisine  $A$  matrisinin  $c$  skaleri ile **çarpımı** denir ve  $c.A$  ile gösterilir. Böylece

$$c \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \dots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \dots & ca_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \dots & ca_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

olur.

**Örnek 2.1.14**  $c = 1 - \mathbf{i}$  skaleri ve

$$A = \begin{bmatrix} -\mathbf{i} & \mathbf{i} \\ 0 & -2 + \mathbf{i} \\ 2 & -1 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

matrisi için  $c.A$  çarpımı  $A$  ile **aynı mertebeden**

$$c.A = \begin{bmatrix} -1 - \mathbf{i} & 1 + \mathbf{i} \\ 0 & -1 + 3\mathbf{i} \\ 2 - 2\mathbf{i} & -1 + \mathbf{i} \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

şeklinde bir matris olur.

**Tanım 2.1.15** Bir  $A = [a_{ij}]_{m \times n} \in \mathbb{R}_n^m$  (veya  $\mathbb{C}_n^m$ ) matrisi verilsin.  $-A = [-a_{ij}]_{m \times n} \in \mathbb{R}_n^m$  (veya  $\mathbb{C}_n^m$ ) matrisine  $A$  nın **toplamsal tersi** denir.

**Uyarı 2.1.16**  $A + (-B)$  yerine kısaca  $A - B$  yazılır.

Matris toplamının ve skalar çarpımının bazı özellikleri aşağıdaki teoremlerle ispatsız bir şekilde verilebilir.

**Teorem 2.1.17** Her  $A, B, C \in \mathbb{R}_n^m$  (veya  $\mathbb{C}_n^m$ ) matrisleri için aşağıdakiler sağlanır:

1.  $(A + B) + C = A + (B + C)$ ;
2.  $A + 0 = A = 0 + A$ ;
3.  $A + (-A) = 0 = (-A) + A$ ;
4.  $A + B = B + A$ ;
5.  $A + C = B + C \Rightarrow A = B$  ve  $A + B = A + C \Rightarrow B = C$  dir.

**Teorem 2.1.18** Her  $A, B \in \mathbb{R}_n^m$  (veya  $\mathbb{C}_n^m$ ) matrisleri ve her  $c, d \in \mathbb{R}$  (veya  $\mathbb{C}$ ) skalerleri için aşağıdakiler sağlanır:

1.  $c.(A + B) = c.A + c.B$ ;
2.  $(c + d).A = c.A + d.A$ ;
3.  $(cd).A = c.(d.A)$ ;
4.  $1, \mathbb{R}$  nin (veya  $(1, 0)$ ,  $\mathbb{C}$  nin) çarpma işlemine göre birim elemanı olmak üzere  $1.A = A$  dir.

**Uyarı 2.1.19**  $\mathbb{R}_n^m$  (veya  $\mathbb{C}_n^m$ ) kümesinin bu işlemler ve sağladığı özellikler sayesinde ileride bir cebirsel yapı (yani bir vektör uzayı) olduğu gösterilecektir.

**Tanım 2.1.20**  $i$  ve  $j$  doğal sayılar olmak üzere

$$\begin{aligned} i = j \text{ ise } \delta_{ij} &= 1 \\ i \neq j \text{ ise } \delta_{ij} &= 0 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan  $\delta_{ij}$  sayısına *Kronocker Deltası* adı verilir.

Leopold Kronocker (1823-1891). Alman matematikçi ve mantıkçı.



Resim-1: Leopold Kronocker (1823-1891)

**Örnek 2.1.21**  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  olmak üzere

$$E_i = \begin{bmatrix} \delta_{1i} \\ \delta_{2i} \\ \vdots \\ \delta_{mi} \end{bmatrix}_{m \times 1}$$

şeklinde verilen  $E_1, E_2, \dots, E_m$  sütun matrislerini açık olarak yazalım:  $\delta_{ij}$  Kronecker Deltası yardımıyla

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{m \times 1}, E_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{m \times 1}, \dots, E_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{m \times 1}$$

elde edilir.

**Örnek 2.1.22**  $\mathbb{C}_1^4$  matrisler kümesinde

$$A = \begin{bmatrix} 3 + 2\mathbf{i} \\ -7 \\ 1 - 4\mathbf{i} \\ 6\mathbf{i} \end{bmatrix}$$

matrisini  $E_1, E_2, E_3, E_4$  vektörleri cinsinden ifade edelim: Bunun için ilk olarak

$$\begin{bmatrix} 3 + 2\mathbf{i} \\ -7 \\ 1 - 4\mathbf{i} \\ 6\mathbf{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 + 2\mathbf{i} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -7 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 - 4\mathbf{i} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 6\mathbf{i} \end{bmatrix}$$

ve daha sonra

$$= (3 + 2\mathbf{i}) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 7 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (1 - 4\mathbf{i}) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (6\mathbf{i}) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

olur ki bu

$$A = (3 + 2\mathbf{i}) E_1 - 7E_2 + (1 - 4\mathbf{i}) E_3 + (6\mathbf{i}) E_4$$

demektir.

### 2.1.3 Matrislerde çarpma işlemi

Matrislerde toplama işlemi fonksiyonların toplama işlemlerinden yararlanarak Tanım 2.1.11 ile ifade edildi. Ancak matrislerde çarpma işlemi böyle değildir.

**Tanım 2.1.23** *A matrisi  $m \times n$  tipinde ve B matrisi  $n \times p$  tipinde olsun.  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  ve  $B = [b_{ij}]_{n \times p}$  olduğunu varsayalım.  $(i, k)$  uncu bileşeni*

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}$$

eşitliğiyle tanımlı olan  $[c_{ij}]_{m \times p}$  matrisine A ile B matrisinin **çarpımı** denir ve  $AB$  ile gösterilir.

**Uyarı 2.1.24** *Herhangi A ve B matrisleri için çarpım tanımlı değildir. Bu matrislerin çarpılabilir olması için A'nın sütun sayısı B'nin satır sayısına eşit olmalıdır.*

Bu tanım kısaca

$$[a_{ij}]_{m \times n} [b_{ij}]_{n \times p} = \left[ \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} \right]_{m \times p}$$

eşitliği ile verilebilir.



**Örnek 2.1.25** Aşağıda verilen matrisler çarpılabilir ise  $AB$  matrisini bulalım.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}_{3 \times 2} \quad \text{ve} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

için  $A$  nın sütun sayısı  $B$  nin satır sayısına eşit olduğundan bu matrisler çarpılabilir ve

$$AB = \begin{bmatrix} 3 \cdot 5 + 1 \cdot (-1) & 3 \cdot (-2) + 1 \cdot 0 \\ 0 \cdot (5) + (-2) \cdot (-1) & 0 \cdot (-2) + (-2) \cdot 0 \\ 4 \cdot 5 + 3 \cdot (-1) & 4 \cdot (-2) + 3 \cdot 0 \end{bmatrix}_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 14 & -6 \\ 2 & 0 \\ 17 & -8 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

dir.

**Örnek 2.1.26**  $A$  ve  $B$  matrisleri çarpılabilir olsun ve  $AB = C$  verilsin öyle ki

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & m \end{bmatrix}_{2 \times 3}, \quad B = \begin{bmatrix} -7 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}_{3 \times 1}, \quad C = \begin{bmatrix} 4n \\ 10 \end{bmatrix}_{2 \times 1}.$$

Buna göre  $m$  ve  $n$  değerlerini bulalım.  $O$  halde

$$C = \begin{bmatrix} 4n \\ 10 \end{bmatrix}_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} 1 \cdot (-7) + 0 \cdot 2 + 3 \cdot 5 \\ (-1) \cdot (-7) + (-1) \cdot 2 + m \cdot 5 \end{bmatrix}_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 + 5m \end{bmatrix}_{2 \times 1}$$

yani  $m = 1$  ve  $n = 2$  olur.

**Teorem 2.1.27** Matrislerde çarpma işleminin aşağıdaki özellikleri vardır:

1.  $A$  matrisi  $m \times n$  tipinde,  $B$  matrisi  $n \times p$  tipinde ve  $C$  matrisi  $p \times r$  tipinde olmak üzere

$$A(BC) = (AB)C$$

dir.

2.  $A$  matrisi  $m \times n$  tipinde,  $B$  matrisi  $n \times p$  tipinde ve  $C$  matrisi  $n \times p$  tipinde olmak üzere

$$A(B + C) = AB + AC$$

dir.

3.  $A$  matrisi  $m \times n$  tipinde,  $B$  matrisi  $p \times m$  tipinde ve  $C$  matrisi  $p \times m$  tipinde olmak üzere

$$(B + C)A = BA + CA$$

dir.

4.  $c$  bir skaler ve  $A$  matrisi  $m \times n$  tipinde,  $B$  matrisi  $p \times m$  tipinde olmak üzere

$$(c.A)B = c.(AB) \quad \text{ve} \quad A(c.B) = c.(AB)$$

dir.

**Uyarı 2.1.28** İleride vektör uzayları konusu anlatılırken  $\mathbb{R}_n^n$  (veya  $\mathbb{C}_n^n$ ) karesel matrislerin kümesi, matris çarpımının özelliklerinin yanı sıra matris toplama ve skalerle çarpımın sahip olduğu özellikler sayesinde **cebir** adını alacaktır.

### 2.1.4 Bir matrisin transpozu

**Tanım 2.1.29**  $A$  matrisi  $m \times n$  tipinde olsun.  $A$ 'nın satırları sütun yapılarak elde edilen yeni matrise  $A$ 'nın **transpozu** (ya da **devriği**) denir ve  $A^T$  ile gösterilir.

Bu tanıma göre

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} \quad \text{ise} \quad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{n \times m}$$

dir.

**Uyarı 2.1.30** 1.  $A$  matrisi  $m \times n$  tipinde ise  $A^T$   $n \times m$  tipindedir;

2.  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  ve  $A^T = [b_{ij}]_{n \times m}$  ise  $b_{ji} = a_{ij}$  dir;

3.  $(A^T)^T = A$  dir.

**Örnek 2.1.31** Aşağıda verilen matrislerin transpozlarını bulalım:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}_{3 \times 2}, B = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \text{ ve } C = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}_{1 \times 3}.$$

Buna göre

$$A^T = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 3}, B^T = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \text{ ve } C^T = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$$

olur.

**Teorem 2.1.32** 1.  $A$  ve  $B$  matrisleri  $m \times n$  tipinde ve  $c$  bir skaler ise

$$(A + B)^T = A^T + B^T \text{ ve } (c.A^T) = c.A^T$$

dir.

2.  $A$  matrisi  $m \times n$  tipinde,  $B$  matrisi  $n \times p$  tipinde ise  $B^T A^T$  tanımlı olup

$$(AB)^T = B^T A^T$$

dir.

**Tanım 2.1.33** Bir  $A$  matrisi için; eğer  $A^T = A$  ise  $A$  ya **simetrik matris**,  $A^T = -A$  ise **antisimetrik** (veya **ters simetrik**) matris adı verilir.

**Örnek 2.1.34**  $\theta \in (-\infty, \infty)$  olmak üzere aşağıdaki matris simetrik matrislere bir örnektir:

$$A = \begin{bmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta & 0 \\ \sinh \theta & \cosh \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

**Uyarı 2.1.35** *A matrisi üç boyutlu Lorentz-Minkowski uzayında  $z$  – eksenini etrafında  $\theta$  radyan kadarlık bir dönme hareketini temsil eder.*

Hendrik A. Lorentz (1853-1898). Hollandalı fizikçi ve matematikçi. 1902 yılı Nobel Fizik Ödülü sahibi.



Resim-2: Hendrik A. Lorentz (1853-1898)

Hermann Minkowski (1864-1909). Alman matematikçi.



Resim-3: Hermann Minkowski (1864-1909)

### 2.1.5 Kare matrisler

**Tanım 2.1.36** *Satır sayısı sütun sayısına eşit olan matrislere kare (ya da karesel) matris adı verilir.  $n \times n$  tipinde bir kare matrise  $n$  **inci mertebeden kare matris** denir.*

**Örnek 2.1.37** Aşağıdakiler kare matrislere birer örnektir:

$$A = [-5]_{1 \times 1}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2}, \quad C = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}_{4 \times 4}.$$

**Tanım 2.1.38**  $n$ -inci mertebeden bir kare matriste  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$  sayılarının oluşturduğu

$$(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$$

sıralı sayı  $n$ -lisine kare matrisin **köşegeni** denir.

**Örnek 2.1.39** Aşağıda verilen  $A$  matrisinin köşegenindeki elemanlar sarı renkle gösterilmiştir.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & -2 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & 5 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 5 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & -1 & 0 & -7 \end{bmatrix}_{5 \times 5}.$$

**Tanım 2.1.40**  $n$ -inci mertebeden bir kare matrisin köşegenindeki elemanlarının tümü 1, köşegen dışındaki elemanlarının tümü 0 ise, bu matrise  $n$ -**inci mertebeden birim matris** denir ve  $I_n$  ile gösterilir.

**Örnek 2.1.41** Aşağıda farklı mertebelerden birim matris örnekleri verilmiştir:

$$A = [1]_{1 \times 1}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

ve

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n} .$$

**Uyarı 2.1.42**  $n$ -inci mertebeden her  $A$  kare matrisi için

$$AI_n = I_n A = A$$

olduğu kolayca görülebilir. Ayrıca  $A$  matrisi  $m \times n$  tipinde ise

$$AI_n = A \text{ ve } I_m A = A$$

olduğunu bir alıştırma olarak çözebilirsiniz.

**Tanım 2.1.43** 1.  $A$ ,  $n$ -inci mertebeden bir kare matris olmak üzere  $i \neq j$  için  $a_{ij} = 0$  ise  $A$  matrisine **köşegen matris** denir.

2. Bir köşegen matrisin köşegenindeki elemanları eşit ise bu matrise **skaler matris** denir.

3.  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$  olmak üzere  $i > j$  için  $a_{ij} = 0$  ise  $A$  matrisine **üst üçgen** ve  $i < j$  için  $a_{ij} = 0$  ise  $A$  matrisine **alt üçgen** matris adı verilir.

Daha açık olarak ifade edilirse,

$$\text{Köşegen matris : } \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n} .$$

$$\text{Skaler matris : } \begin{bmatrix} c & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & c & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c \end{bmatrix}_{n \times n} .$$

$$\text{Üst üçgen matris : } \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n} .$$

$$\text{Alt üçgen matris : } \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n} .$$

**Uyarı 2.1.44** Birim matris köşegenindeki elemanları 1 olan bir skaler matristir. Ayrıca hem üst hem de alt üçgen matristir.

### 2.1.6 Bir matrisin çarpma işlemine göre tersi

**Tanım 2.1.45**  $A$   $n - \text{inci}$  mertebeden bir kare matris olsun.  $BA = I_n$  ve  $AB = I_n$  olacak şekilde bir  $B$  matrisi varsa bu  $B$  matrisine  $A$  nın **çarpmaya göre tersi** denir ve  $A^{-1}$  ile gösterilir.

**Uyarı 2.1.46** Yukarıdaki tanım sadece karesel matrislerin çarpmaya göre terslerinin olabileceğini ifade eder.

**Tanım 2.1.47** Bir  $A$  kare matrisinin çarpma işlemine göre tersi yoksa bu matrise **singüler** (ya da **tekil**) matris denir.  $A$  matrisinin çarpmaya göre tersi varsa bu durumda  $A$  matrisine **regüler** (ya da **tersinir**) matris denir.

**Örnek 2.1.48**

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

matrisinin regüler bir matris olduğunu ve tersinin

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

olduğunu gösterelim. Bunun için  $AA^{-1}$  ve  $A^{-1}A$  çarpımlarının  $I_2$  matrisine eşit olduğunu göstermeliyiz, yani

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olduğundan  $A$  matrisinin çarpmaya göre tersi vardır ve

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

dir.

**Teorem 2.1.49** 1.  $A$  kare matrisinin çarpmaya göre tersi varsa  $A^T$  matrisinin de çarpmaya göre tersi vardır ve

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

dir.

2.  $A$ ,  $n$  - inci mertebeden regüler bir matris ise  $A^{-1}$  de regülerdir ve

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

dir.



3.  $n$  – inci mertebeden  $A$  ve  $B$  regüler kare matrisleri için  $AB$  matrisinin de çarpmaya göre tersi vardır ve

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

dir.

**Tanım 2.1.50**  $A \in \mathbb{R}_n^n$  regüler matrisi verilsin. Eğer  $A^{-1} = A^T$  oluyorsa  $A$  ya **ortogonal matris** denir.  $A \in \mathbb{C}_n^n$  olması durumunda  $A$  ya **kompleks ortogonal matris** adı verilir.

**Uyarı 2.1.51** Yukarıdaki tanıma göre  $A$  ortogonal ise  $A^T A = AA^T = I_n$  dir ve bunun tersi de doğrudur.

**Örnek 2.1.52**  $\theta \in [0, 2\pi]$  olmak üzere

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

matrisinin bir ortogonal matris olduğunu gösterelim. Buna göre

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta.a - \sin \theta.c & \cos \theta.b - \sin \theta.d \\ \sin \theta.a + \cos \theta.c & \sin \theta.b + \cos \theta.d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} a.\cos \theta + b.\sin \theta & -a.\sin \theta + b.\cos \theta \\ c.\cos \theta + d.\sin \theta & -c.\sin \theta + d.\cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

için matris eşitliği kullanılarak kolayca

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

olduğu görülebilir. Bu ise  $A^{-1} = A^T$  olduğundan  $A$  nın ortogonal olması anlamına gelir.

**Uyarı 2.1.53** Yukarıdaki örnekte verilen

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

matrisi reel düzlemde orijin etrafında  $\theta$  radyan kadar bir dönme hareketini temsil eder.

**Tanım 2.1.54** Bir  $A = [a_{ij}]_{m \times n} \in \mathbb{C}_n^m$  matrisi için  $a_{ij}$  sayılarının her birinin eşleniği alınarak elde edilen matrise  $A$  nın **eşleniği** denir ve  $\bar{A}$  ile gösterilir. Kısaca  $\bar{A} = [\bar{a}_{ij}]_{m \times n}$  dir.

**Örnek 2.1.55**

$$A = \begin{bmatrix} 2 + 3\mathbf{i} & -3 + \mathbf{i} & 4\mathbf{i} \\ -2 - 5\mathbf{i} & 7 & 6 - 3\mathbf{i} \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

matrisinin eşleniği

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 2 - 3\mathbf{i} & -3 - \mathbf{i} & -4\mathbf{i} \\ -2 + 5\mathbf{i} & 7 & 6 + 3\mathbf{i} \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

olur.

**Tanım 2.1.56** Bir  $A \in \mathbb{R}_n^m$  (veya  $\in \mathbb{C}_n^m$ ) matrisinin bazı satır veya sütunları silinerek elde edilen yeni matrise  $A$  nın bir **altmatrisi** denir.

**Örnek 2.1.57** Bir önceki örnekte verilen  $A$  matrisi için

$$A_1 = [2 + 3\mathbf{i}]_{1 \times 1}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 + 3\mathbf{i} \\ -2 - 5\mathbf{i} \end{bmatrix}_{2 \times 1}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} -3 + \mathbf{i} & 4\mathbf{i} \\ 7 & 6 - 3\mathbf{i} \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

altmatrislerdir.

**Tanım 2.1.58** Bir  $A = [a_{ij}]_{n \times n} \in \mathbb{R}_n^n$  (veya  $\in \mathbb{C}_n^n$ ) kare matrisi için

$$\sum_{i=1}^n a_{ii}$$

sayısına  $A$  nın **izi** denir ve  $\text{Iz}A$  şeklinde gösterilir.

**Uyarı 2.1.59** Bir kare matrisin izi, bu matrisin köşegenindeki elemanların toplamıdır. Kare olmayan matrislerin izi tanımlı değildir.

**Örnek 2.1.60**

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

matrisi için  $\text{İz}A = 3 + 2 + (-1) = 4$  tür.

**Teorem 2.1.61**  $A, B \in \mathbb{R}_n^m$  (veya  $\in \mathbb{C}_n^m$ ) matrisleri ve  $c \in \mathbb{R}$  (veya  $\in \mathbb{C}$ ) skaleri için aşağıdaki ifadeler sağlanır:

1.  $\text{İz}(A + B) = \text{İz}A + \text{İz}B$ ;
2.  $\text{İz}(c.A) = c.\text{İz}A$ ;
3.  $\text{İz}(BA) = \text{İz}(AB)$ .

### 2.1.7 Bir matrisin eşolon formu

**Tanım 2.1.62**  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$   $m \times n$  tipinde bir matris olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanıyor ise  $A$  ya **satırca indirgenmiş eşolon formda** bir matris denir:

1.  $A$ 'nın sıfır satırları (bütün elemanları sıfır olan satırları) varsa bunlar matrisin en alt satırlarıdır.
2. Sıfırdan farklı bir satırın soldan itibaren sıfırdan farklı ilk elemanı **1** dir. Bu elemana ilgili satırın ilk **1** i denir.
3. Sıfırdan farklı her bir satır için, ilk **1** bir önceki satırların herhangi ilk **1** lerinin sağında ve altında yer alır.
4. Bir sütun bir ilk **1** içeriyorsa bu sütundaki diğer bütün elemanlar sıfırdır.

Satırca indirgenmiş eşolon formundaki bir matris, bu matrisin üst sol köşesinden azalan ilk **1** lerin bir merdiven (eşolon) örneği olarak oluşur.

**Uyarı 2.1.63** 1. Yukarıdaki tanımda 1,2,3 özelliklerini sağlayan  $m \times n$  tipindeki bir matrise **satırca eşolon formdadır** denir.

2. Bu tanımlarda hiç sıfır satırı olmayabilir.

3. Benzer tanım sütunca indirgenmiş eşolon form ve sütunca eşolon form için de yapılabilir.

**Örnek 2.1.64**

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisi *satırca indirgenmiş eşolon formdadır*.

**Örnek 2.1.65**

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisi *satırca indirgenmiş eşolon formdadır*.

**Örnek 2.1.66**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi *satırca indirgenmiş eşolon formdadır*.

**Örnek 2.1.67**

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde verilen matrisin 2. ve 3. sütununun ilk 1 i dışında sıfırdan farklı elemanları vardır ve dolayısıyla satırca eşolon formdadır. (Yukarıda verilen tanımın 4 numaralı özelliği sağlanmamaktadır.)

**Örnek 2.1.68**

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{1} & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

şeklinde verilen matrisin 5. 6. ve 7. sütunları ilk 1 dışında sıfırdan farklı elemanlara sahiptir ve dolayısıyla satırca eşolon formdadır. (Yukarıda verilen tanımın 4 numaralı özelliği sağlanmamaktadır.)

**Örnek 2.1.69**

$$\begin{bmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

şeklinde verilen matrisin 1. satır 2. sütundaki eleman 5 olduğundan ne satırca indirgenmiş eşolon ne de satırca eşolon formdadır. (Yukarıda verilen tanıma göre 1. satır bir ilk 1 e sahip değildir.)

**Örnek 2.1.70**

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde verilen matrisin 1. satır 1. sütundaki eleman 3 olduğundan ne satırca indirgenmiş eşolon ne de satırca eşolon formdadır. (Yukarıda verilen tanıma göre 1. satır bir ilk 1 e sahip değildir.)

**Örnek 2.1.71**

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 4 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & \mathbf{1} & 7 & 0 & 2 & 9 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde verilen matrisin 3. satır 2. sütunundaki eleman 3 olduğundan ne satırca indirgenmiş eşolon ne de satırca eşolon formdadır. (Yukarıda verilen tanıma göre 3. satır bir ilk 1 e sahip değildir.)

### 2.1.8 Elemanter operasyonlar

Bir  $A \in \mathbb{R}_n^m$  (ya da  $\in \mathbb{C}_n^m$ ) matrisinin satırlarını  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$  ve sütunlarını  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots$  ile gösterelim. Buna göre aşağıdaki tanım verilebilir:

**Tanım 2.1.72** Bir  $A \in \mathbb{R}_n^m$  (ya da  $\in \mathbb{C}_n^m$ ) matrisi üzerinde tanımlanan aşağıdaki işlemlere matrisler için **elemanter satır (sütun) operasyonu** denir ve  $\varepsilon$  ile gösterilir:

1.  $A \in \mathbb{R}_n^m$  (ya da  $\in \mathbb{C}_n^m$ ) matrisinin herhangi iki satırını (veya sütununu) kendi aralarında yer değiştirmek,  $\varepsilon : \alpha_i \leftrightarrow \alpha_j$ ;
2.  $A \in \mathbb{R}_n^m$  (ya da  $\in \mathbb{C}_n^m$ ) matrisinin herhangi iki satırını (veya sütununu) sıfırdan farklı bir sayı ile çarpmak,  $\varepsilon : \alpha_i \rightarrow c.\alpha_i$ ;
3.  $A \in \mathbb{R}_n^m$  (ya da  $\in \mathbb{C}_n^m$ ) matrisinin herhangi bir satırını (veya sütununu) bir sayı ile çarpıp diğer bir satırına (veya sütununa) eklemek,  $\varepsilon : \alpha_i \rightarrow \alpha_i + c.\alpha_j$ .

**Tanım 2.1.73** Bir  $A$  matrisine sonlu sayıda satır (sütun) elemanter operasyonu uygulanarak bir  $B$  matrisi elde ediliyorsa  $A$  ve  $B$  matrislerine **satırca (sütunca) denk matrisler** adı verilir ve  $A \approx B$  ile gösterilir.

#### Örnek 2.1.74

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 9 & 11 \end{bmatrix}$$

matrisleri satırca denktir. Gerçekten de, sırasıyla,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\varepsilon_1: \alpha_1 \leftrightarrow 2.\alpha_1} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\varepsilon_2: \alpha_2 \leftrightarrow \alpha_3} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_3: \alpha_3 + 3\alpha_2 \approx \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 9 & 11 \end{bmatrix}$$

elemantar satır operasyonları uygulanmıştır.

### Örnek 2.1.75

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \end{bmatrix}$$

matrisinin satırca indirgenmiş eşolon formunu elemantar operasyonlar yardımıyla bulalım.

$$\varepsilon_1: \alpha_3 \rightarrow \frac{1}{2}\alpha_3 \approx \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ \mathbf{1} & 1 & \frac{-5}{2} & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \end{bmatrix} \quad \varepsilon_2: \alpha_4 \rightarrow \alpha_4 - 2\alpha_3 \approx \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ \mathbf{1} & 1 & \frac{-5}{2} & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_3: \alpha_1 \rightarrow \frac{1}{2}\alpha_1 \approx \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1} & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ \mathbf{1} & 1 & \frac{-5}{2} & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 7 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \varepsilon_4: \alpha_3 \rightarrow \alpha_3 - \alpha_1 \\ \varepsilon_5: \alpha_4 \rightarrow \alpha_4 + 2\alpha_1 \end{array} \approx \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1} & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ \mathbf{1} & 0 & -4 & 3 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_6: \alpha_4 \rightarrow \alpha_4 - \alpha_2 \approx \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1} & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ \mathbf{1} & 0 & -4 & 3 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \varepsilon_7: \alpha_2 \rightarrow \frac{1}{2}\alpha_2 \approx \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1} & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \frac{3}{2} & 2 \\ \mathbf{1} & 0 & -4 & 3 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \varepsilon_8: \alpha_1 \rightarrow \alpha_1 - \frac{3}{2}\alpha_2 \\ \varepsilon_9: \alpha_3 \rightarrow \alpha_3 + 4\alpha_2 \end{array} \begin{array}{c} \approx \\ \approx \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \frac{-17}{4} & \frac{-5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 9 & \frac{19}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \varepsilon_{10}: \alpha_1 \leftrightarrow \alpha_3 \\ \varepsilon_{11}: \alpha_2 \leftrightarrow \alpha_3 \end{array} \begin{array}{c} \approx \\ \approx \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 9 & \frac{19}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-17}{4} & \frac{-5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

**Uyarı 2.1.76** 1. Her matris kendisine denktir.

2. Eğer  $B$ ,  $A$  ya satırca denk ise  $A$  da  $B$  ye satırca denktir.

3. Eğer  $C$ ,  $B$  ye satırca denk;  $B$  de  $A$  ya satırca denk ise  $C$  de  $A$  ya satırca denktir.

**Teorem 2.1.77** Her sıfırdan farklı  $m \times n$  tipindeki  $A = [a_{ij}]$  matrisi, satırca (sütunca) eşolon formdaki bir matrise satırca (sütunca) denktir.

**Teorem 2.1.78** Her sıfırdan farklı  $m \times n$  tipindeki  $A = [a_{ij}]$  matrisi, satırca (sütunca) indirgenmiş eşolon formdaki bir tek matrise satırca (sütunca) denktir.

**Uyarı 2.1.79** Bir matrisin satırca eşolon formunun tek olmadığına dikkat ediniz.

**Tanım 2.1.80** Bir birim matrise bir tane elemanter operasyon uygulanarak elde edilen matrise **elemanter matris** denir.

**Örnek 2.1.81** Aşağıda elemanter matris örnekleri verilmiştir:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \varepsilon: \alpha_2 \rightarrow \alpha_2 + \alpha_1 \\ \approx \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \varepsilon: \alpha_1 \leftrightarrow \alpha_3 \\ \approx \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\approx]{\varepsilon: \alpha_3 \rightarrow -5\alpha_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Teorem 2.1.82** *Elementer matrisler regüler matrislerdir, yani*

$$(\varepsilon(I_n))^{-1} = \varepsilon^{-1}(I_n)$$

*dir.*

**Örnek 2.1.83** *Yukarıdaki örnekte verilen*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \varepsilon(I_2)$$

*matrisini ele alalım. Buna göre*

$$A^{-1} = \varepsilon^{-1}I_2 = \varepsilon^{-1} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \xrightarrow[\approx]{\varepsilon^{-1}: \alpha_2 \rightarrow \alpha_2 - \alpha_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

*olur ki*

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

*bulunur. Benzer şekilde*

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \varepsilon(I_3)$$

*için*

$$B^{-1} = \varepsilon^{-1}I_3 = \varepsilon^{-1} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \xrightarrow[\approx]{\varepsilon^{-1}: \alpha_3 \leftrightarrow \alpha_1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olup

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B$$

elde edilir.

**Uyarı 2.1.84** Yukarıdaki örnekte  $B = B^{-1}$  olduğuna dikkat ediniz. Böyle matrislere **involutif (kendine dönük)** matrisler adı verilir. Ayrıca  $p \in \mathbb{Z}$  için  $A^p = 0$  şartını sağlayan  $A$  kare matrisine ise **nilpotent matris (sıfır güçlü)** adı verilir.

### 2.1.9 Elemanter operasyonların uygulamaları

**Bir matrisin tersinin bulunması**

**Teorem 2.1.85**  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  matrisi ve  $A$ 'nın satırca indirgenmiş eşolon formu olan  $R$  matrisi verilsin. O halde

$$R = E_k E_{k-1} \dots E_1 A$$

olacak şekilde  $E_1, \dots, E_k$  elemanter matrisleri vardır ve

$$A = E_1^{-1} \dots E_k^{-1} R$$

şeklinde çarpanlarına ayrılabilir.

**Sonuç 2.1.86**  $A$ ,  $n \times n$  matrisi  $I_n$  matrisine satırca denk olsun. Yani

$$I_n = \varepsilon_k(I_n) \dots \varepsilon_1(I_n) A$$

olsun. Bu durumda ters matris tanımından

$$A^{-1} = \varepsilon_k(I_n) \dots \varepsilon_1(I_n) \quad (2.2)$$

dir.

$A$ ,  $n \times n$  matrisi  $I_n$  matrisine satırca denk olsun. Yani

$$\varepsilon_k(\dots \varepsilon_2(\varepsilon_1(A))) = I_n$$

olsun. Şimdi  $\varepsilon_k, \dots, \varepsilon_1$  elemanter operasyonları  $[A : I_n]$  matrisine uygulayalım. Bu durumda

$$\varepsilon_k (\dots \varepsilon_2 (\varepsilon_1 [A : I_n])) = [\varepsilon_k (\dots \varepsilon_2 (\varepsilon_1 A)) : \varepsilon_k (\dots \varepsilon_2 (\varepsilon_1 I_n))] \quad (2.3)$$

yazılabilir. (2.2) ve (2.3) eşitliklerinden

$$\left[ A : I_n \right] \approx \left[ I_n : A^{-1} \right]$$

elde edilir.

### Örnek 2.1.87

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

matrisinin tersini bulalım. Bunun için

$$[A : I_3] \approx \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & : & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & : & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_1: \alpha_1 \rightarrow \alpha_1 - \alpha_3 \approx \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 & : & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & : & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & : & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\varepsilon_2: \alpha_1 \rightarrow -\alpha_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & : & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & : & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & : & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_3: \alpha_1 \rightarrow \alpha_3 - 3\alpha_1 \approx \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & : & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & : & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -6 & : & 3 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\varepsilon_4: \alpha_1 \rightarrow \alpha_1 - 2\alpha_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & : & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & : & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -6 & : & 3 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_5: \alpha_3 \rightarrow \alpha_3 + 5\alpha_2 \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & : & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & : & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & : & 3 & 5 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\varepsilon_6: \alpha_3 \rightarrow \frac{1}{4}\alpha_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & : & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & : & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & : & \frac{3}{4} & \frac{5}{4} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \varepsilon_7: \alpha_2 \rightarrow \alpha_2 - 2\alpha_3 \\ \approx \end{array} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & -1 & : & -1 & -2 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & : & \frac{-3}{2} & \frac{-3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & : & \frac{3}{4} & \frac{5}{4} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix} \begin{array}{c} \varepsilon_8: \alpha_1 \rightarrow \alpha_1 + \alpha_3 \\ \approx \end{array} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & : & \frac{-1}{4} & \frac{-3}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & : & \frac{-3}{2} & \frac{-3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & : & \frac{3}{4} & \frac{5}{4} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$$

bulunur. O halde

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{4} & \frac{-3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{-3}{2} & \frac{-3}{2} & 1 \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & -3 & 2 \\ -6 & -6 & 4 \\ 3 & 5 & -2 \end{bmatrix}.$$

### Örnek 2.1.88

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

matrisinin tersini bulalım. Bunun için

$$[A : I_3] \approx \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & : & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 4 & : & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & : & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \varepsilon_1: \alpha_2 \rightarrow \alpha_2 - 3\alpha_1 \\ \varepsilon_2: \alpha_3 \rightarrow \alpha_3 - 2\alpha_1 \\ \approx \end{array} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 1 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & : & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & : & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \varepsilon_3: \alpha_1 \rightarrow \alpha_1 - 2\alpha_2 \\ \varepsilon_4: \alpha_3 \rightarrow \alpha_3 + 5\alpha_2 \\ \approx \end{array} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & -1 & : & 7 & -2 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & : & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & : & -17 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \varepsilon_5: \alpha_3 \rightarrow \frac{1}{6}\alpha_3 \\ \approx \end{array} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & -1 & : & 7 & -2 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & : & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & : & \frac{-17}{6} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{array}{c} \varepsilon_6: \alpha_2 \rightarrow \alpha_2 - \alpha_3 \\ \varepsilon_7: \alpha_1 \rightarrow \alpha_1 + \alpha_3 \\ \approx \end{array} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & : & \frac{25}{6} & \frac{-7}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & : & \frac{-1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{-1}{6} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & : & \frac{-17}{6} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

bulunur. O halde

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{25}{6} & \frac{-7}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{-1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{-1}{6} \\ \frac{-17}{6} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}.$$

**Uyarı 2.1.89** *Elemanter işlemlerin pratik uygulamaları aşağıdaki gibi sıralanabilir:*

1. *Bir matrisinin satırca indirgenmiş eşolon formunu bulmak.*
2. *Elemanter matrisler elde etmek.*
3. *Matrisleri çarpanlarına ayırmak.*
4. *Bir regüler matrisin tersini bulmak.*
5. *Vektör kümelerinin lineer bağımsız olup olmadığını tespit etmek (ileride verilecektir).*
6. *Lineer denklem sistemlerinin çözümünü bulmak (ileride verilecektir).*
7. *Bir kare matrisin determinantını hesaplamak (ileride verilecektir).*

### 2.1.10 Bölüm sonu alıştırmaları

1.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \text{ ve } B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

matrisleri için  $A + B$ ,  $A - B$ ,  $A + B^T$ ,  $AB$ ,  $AB^T$ ,  $A^T B$  matrislerini bulunuz.

2.

$$A = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ ve } B = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

olmak üzere  $A^T B$  ve  $AB^T$  matrislerini bulunuz.

3.  $A \neq 0$  ve  $B \neq 0$  ve  $AB = 0$  olmak üzere  $A$  ve  $B$  matrislerini bulunuz.

4.  $\theta \in \mathbb{R}$  ve  $p \in \mathbb{Z}^+$  olmak üzere

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}^p = \begin{bmatrix} \cos p\theta & -\sin p\theta \\ \sin p\theta & \cos p\theta \end{bmatrix}$$

olduğunu gösteriniz.

5.  $A$ ,  $m \times n$  tipinde bir matris olmak üzere  $(-A)^T = -A^T$  olduğunu gösteriniz.
6.  $m \times n$  tipinde her  $A$  matrisi için  $AA^T$  ve  $A^T A$  matrislerinin simetrik olduğunu gösteriniz.
7. Simetrik bir  $A$  matrisinin transpozununun da simetrik olduğunu gösteriniz.
8.  $A$  matrisi simetrik olsun.  $A$  nın çarpmaya göre tersi varsa  $A^{-1}$  matrisinin de simetrik olduğunu gösteriniz.
9.  $A$  ortogonal bir matris ise  $A^T$  matrisinin de ortogonal olduğunu gösteriniz.
10.  $n$ . mertebeden birim matris  $I_n$  ile gösterildiğine göre  $I_n = [\delta_{ij}]_{n \times n}$  olduğunu gösteriniz.
11.  $A, B \in \mathbb{C}_n^m$  olmak üzere  $\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}$  olduğunu gösteriniz.
12.  $\lambda \in \mathbb{C}$  ve  $A \in \mathbb{C}_n^m$  olmak üzere  $\overline{\lambda \cdot A} = \overline{\lambda} \cdot \overline{A}$  olduğunu gösteriniz.
13.  $A \in \mathbb{C}_1^m$  olmak üzere  $\overline{A^T} A$  ve  $A \overline{A^T}$  matrislerini bulunuz.
14.  $A$  ve  $B$ ,  $n$ . mertebeden üst üçgen matrisler ise  $A+B$  ve  $AB$  matrislerinin de üst üçgen matris olduğunu gösteriniz.
15. Aşağıdaki matrislerin çarpmaya göre terslerinin bulunup bulunmadığını gösteriniz. Varsa bulunuz.

(a)

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

(b)

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix},$$

(c)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

(d)

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

16.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre  $A^{-1}$  varsa bu matrisi elementer satır işlemlerinden yararlanarak bulunuz.

17.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre  $A^{-1}$  varsa bu matrisi elementer satır işlemlerinden yararlanarak bulunuz.

18.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre  $A^{-1}$  varsa bu matrisi elementer satır işlemlerinden yararlanarak bulunuz.

19.  $c \neq 0$  ve  $c \in \mathbb{R}$  olmak üzere aşağıda verilen matrislerin her birinin bir elementer matris olduğunu gösteriniz. Bu elementer matrisleri elde etmek için kullanılan elementer operasyonları belirtiniz. Her birinin çarpmaya göre tersini bulunuz.

(a)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

(b)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix},$$

(c)

$$\begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

(d)

$$\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

(e)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}.$$

20.

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 4 & -6 & 1 & -5 \\ 2 & 1 & -3 & 8 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 6 & -9 & 1 & -7 \\ 2 & 0 & -4 & 6 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

olsun.  $A$  matrisine satırca denk olan, satırca indirgenmiş eşolon matrisini bulunuz.



21.

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 2 & -1 & 4 \\ -1 & -2 & 1 & 7 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 8 & 5 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

olsun.  $A$  matrisine satırca denk olan, satırca indirgenmiş eşolon matrisini bulunuz.

## 2.2 Determinantlar

### 2.2.1 Determinant fonksiyonu ve özellikleri

**Tanım 2.2.1** Her  $A = [a_{ij}]_{n \times n} \in \mathbb{R}_n^n$  (ya da  $\in \mathbb{C}_n^n$ ) kare matrisine bir reel (ya da kompleks) skaler karşılık getiren ve  $\det A$ ,  $|A|$  ya da

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

sembollerinden biri ile gösterilen **determinant fonksiyonu** aşağıdaki özellikleri sağlar:

1.  $A$  nın determinanı ile  $A^T$  nin determinanı aynıdır.
2. Bir determinantta herhangi iki satır veya sütun yer değiştirirse determinantın işareti değişir.
3. Bir determinantta herhangi iki satır (veya sütun) aynı ise determinantın değeri sıfırdır.
4. Bir determinantta herhangi iki satırı (veya sütunu) belli bir sayı ile çarpmak demek determinanı o sayı ile çarpmak demektir. Bunun bir sonucu olarak

$$|c.A| = c^n |A|$$

dir.

5. Bir determinanttta herhangi iki satır (veya sütun) orantılı ise determinant değeri sıfırdır.
6. Bir matriste bir satırın (veya sütunun) elemanlarından her biri iki elemanın toplamına eşitse matrisin determinantı aynı cinsten iki matrisin determinantının toplamına eşittir. Yani,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} + b_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} + b_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} + b_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

7. Bir matrisin herhangi bir satırının (veya sütununun) belli bir katının diğer bir satıra (veya sütuna) eklenmesiyle elde edilen matrisin determinantı ilk matrisin determinantına eşittir.
8.  $A, B \in \mathbb{R}_n^m$  (ya da  $\in \mathbb{C}_n^m$ ) için  $\det(AB) = (\det A)(\det B)$  dir.

**Uyarı 2.2.2**  $A \in \mathbb{R}_n^n$  ortogonal bir matris ise  $\det A = \pm 1$  dir (gösteriniz). Eğer  $\det A = 1$  ise  $A$  ya **pozitif ortogonal** ve  $\det A = -1$  ise  $A$  ya **negatif ortogonal matris** denir.

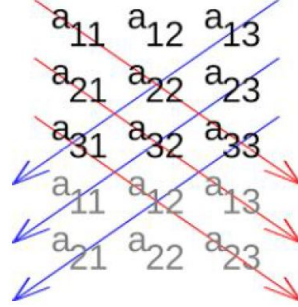
Determinant hesaplamaları için başlıca metotlar şunlardır:

1.  $1 \times 1$  tipindeki  $A = [a_{11}]$  matrisinin determinantı  $\det A = a_{11}$  dir.
2.  $2 \times 2$  tipindeki  $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$  matrisinin determinantı

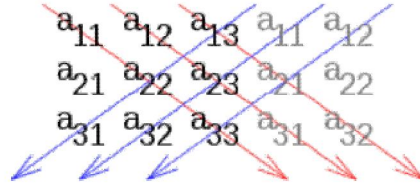
$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

dir.

3. **Sarrus Kuralı:** Sadece  $3 \times 3$  tipindeki matrisin determinantının hesaplanmasında kullanılan bir metottur:



veya



şeklinde düzenlenerek

$$\det A = [a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13}] - [a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{23}a_{32}a_{11}]$$

formülü ile hesaplanır.

### Örnek 2.2.3

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

*determinantını Sarrus kuralı ile hesaplayalım. Buna göre ilk iki satır determinantın altına eklenirse*

$$\det A = (1 \cdot (-2) \cdot 2 + 4 \cdot 0 \cdot 3 + (-3) \cdot 0 \cdot 1) - (3 \cdot (-2) \cdot (-3) + 1 \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 4) = -22$$

*elde edilir. Determinantın ilk iki sütunu, determinantın sağına eklenerek de hesaplanabilir.*

Pierre Frederic Sarrus (1798-1861). Fransız matematikçi.



Resim-4: Pierre Frederic Sarrus (1798-1861)

#### Örnek 2.2.4

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

*determinantını hesaplayalım: Bu determinanti hesaplarken yukarıda verilen 7 numaralı özellik kullanılırsa, yani ilk sütuna diğer sütunlar eklenirse determinantın değeri değişmeyeceğinden*

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

*elde edilir.*

### 2.2.2 Determinant açılımları

**Tanım 2.2.5**  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$  kare matrisi verilsin.  $M_{ij}$  ile  $A$  nın  $i$ . satır ve  $j$ . sütunun silinmesiyle elde edilen  $(n-1) \times (n-1)$  mertebeden bir matris gösterilsin.  $M_{ij}$  matrisinin determinantına  $A$  nın  $a_{ij}$  elemanının **minörü** ve  $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}$  değerine de  $a_{ij}$  elemanının **kofaktörü** (**işaretili minörü** ya da **eşçarpanı**) denir.

#### Örnek 2.2.6

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

matrisinin kofaktörlerini hesaplayalım:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \det M_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \det M_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \det M_{13} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

ve benzer şekilde  $A_{21}, A_{22}, \dots, A_{33}$  de hesaplanabilir.

**Teorem 2.2.7 (Laplace Açılımı)**  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$  ( $n \geq 2$ ) kare matrisi verilsin.  $A$  nın herhangi bir  $i$ . satıra göre Laplace determinant açılımı

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^n a_{ij}A_{ij}$$

veya  $j$ . sütuna göre açılımı

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^n a_{ij}A_{ij}$$

şeklindedir.

Pierre-Simon Laplace (1749-1827). Fransız matematikçi ve gök bilimci.



Resim-5: Pierre-Simon Laplace (1749-1827)

### Örnek 2.2.8

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

*için det A değerini hesaplayalım: 2. satıra göre Laplace açılımı yapılırsa*

$$\begin{aligned} \det A &= a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} \\ &= 0 \cdot A_{21} + 1 \cdot A_{22} + 2A_{23} \end{aligned}$$

*olur. Burada*

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \det M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \det M_{23} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

*olup det A = 3 bulunur.*

**Uyarı 2.2.9**  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$  kare matrisinin  $j$ . sütun elemanları ile  $k$ . sütun elemanlarına ait kofaktörlerinin çarpımının toplamının değeri sıfırdır, yani

$$a_{1j}A_{1k} + a_{2j}A_{2k} + \dots + a_{nj}A_{nk} = 0$$

dir.

**Örnek 2.2.10** Gerçekten de yukarıdaki örnekte 1. sütunun elemanları ile 2. sütunun kofaktörleri çarpılıp toplanırsa

$$\begin{aligned} a_{11}A_{12} + a_{21}A_{22} + a_{31}A_{32} &= \\ &= 2(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 0(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 3(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 12 + 0 - 12 = 0 \end{aligned}$$

olduğu görülür.

### 2.2.3 Bir matrisin adjointi (eki)

**Tanım 2.2.11**  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$  kare matrisi verilsin.  $A$ 'nın her bir  $a_{ij}$  elemanının yerine bu elemana karşılık gelen  $A_{ij}$  kofaktörü yazılmasıyla elde edilen matrisin transpozuna  $A$  matrisinin **adjointi (eki)** denir ve  $\text{adj}A$  ile gösterilir. Açık bir şekilde

$$\text{adj}A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

dir.

**Teorem 2.2.12**  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$  kare matrisi verilsin.

1.  $A(\text{adj}A) = (\text{adj}A)A = (\det A)I_n$ .

2.  $\det A \neq 0$  olmak üzere

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj} A$$

dir.

**Uyarı 2.2.13** Bir  $A$  kare matrisin tersinin olması için  $\det A \neq 0$  olması gerek ve yeterdir. Ayrıca, regülerlik tanımını hatırlanacak olursa bu tanım aşağıdaki şekilde yeniden ifade edilebilir: Eğer  $\det A \neq 0$  ise  $A$  matrisine **regülerdir** denir.

**Örnek 2.2.14**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

matrisinin regüler olduğunu gösterip adjoint matris yardımıyla tersini bulalım. Bunun için  $\det A = -2$  olduğu kolayca görülür. Ayrıca ilgili kofaktörler

$$A_{11} = (-1)^{1+1} 5, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} 4, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} 3, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} 2,$$

olup adjoint matris

$$\text{adj} A = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

ve dolayısıyla

$$A^{-1} = \frac{-1}{2} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

**Örnek 2.2.15**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$



## 2.2 DETERMINANTLAR

45

*matrisinin regüler olduğunu gösterip adjoint matris yardımıyla tersini bulalım. Bunun için Laplace açılımı yardımıyla (birinci satıra göre)*

$$\det A = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

*A matrisi regüler olur. A'nın adjoint matrisi için*

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \det M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3$$

*ve benzer şekilde*

$$A_{12} = - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -6, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{21} = - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{33} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

*bulunur. Dolayısıyla*

$$\text{adj} A = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

*olup*

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 3 & -6 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

*elde edilir.*

### 2.2.4 Bir matrisin determinant rankı

**Tanım 2.2.16** Bir  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  matrisin determinantı sıfırdan farklı en yüksek mertebeli kare altmatrisin mertebesi  $r$  olsun. Bu  $r \in \mathbb{N}$  doğal sayısına  $A$ 'nın **determinant rankı** ya da kısaca **rankı** denir ve  $\text{rank}A$  ile gösterilir.

**Uyarı 2.2.17** 1.  $n$ . mertebeden bir kare matrisin rankı en fazla  $n$  olabilir.

2. Bir regüler kare matrisin rankı kendi mertebesine eşittir.

3. Bir  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ,  $m \neq n$ , matrisi için  $\text{rank}A \leq \min\{m, n\}$  dir.

4. Sıfırdan farklı her reel ya da kompleks skaler  $1 \times 1$  tipinde bir kare matris olduğundan rankı sıfır olamaz ve dolayısıyla böyle bir matrisin rankı en az 1 dir.

#### Örnek 2.2.18

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

matrisi için  $\det A = 0$  olduğundan  $\text{rank}A$ , 3 ten küçük olmalıdır.  $A$ 'nın regüler bir kare altmatrisi

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunabildiğinden  $\text{rank}A = 2$  dir.

#### Örnek 2.2.19

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi için  $\det B = 5$  olduğundan  $\text{rank}B = 3$  olur.

**Örnek 2.2.20**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi için  $\det A = 0$  olduğundan  $\text{rank} A < 4$  olur. Ayrıca 3. satır ilk satırla orantılı olduğundan  $\text{rank} A < 3$  dir. Ancak  $A$  nın

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde regüler bir kare altmatrisi bulunabileceğinden  $\text{rank} A = 2$  olur.

**2.2.5 Bölüm sonu alıştırmaları**

1.

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 7 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -7 \\ 2 & 6 & 5 \end{vmatrix}$$

determinantlarını, Laplace açılım metodunu kullanarak önce 1. sütuna sonra da 2. satıra göre hesaplayınız.

2. Aşağıdaki determinantları hesaplayınız:

(a)

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & 5 \end{vmatrix},$$

(b)

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \end{vmatrix},$$

(c)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 4 & 5 \end{vmatrix},$$

(d)

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

**3.**

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix} = (\det A) (\det C)$$

eşitliğinden yararlanarak

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

matrisinin determinantını hesaplayınız.

4.  $a, b, c \in \mathbb{R}$  için

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = abc(a-b)(b-c)(c-a)$$

olduğunu gösteriniz.

5.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

için  $A^{-1}$  matrisinin varlığını gösterip, daha sonra adjoint matris yardımıyla

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & -2 \\ -1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

olduğunu gösteriniz.

6.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

için  $A^{-1}$  matrisinin varlığını gösterip, daha sonra adjoint matris yardımıyla

$$A^{-1} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -6 & 5 & 12 \end{bmatrix}$$

olduğunu gösteriniz.

7.  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  (veya  $\mathbb{C}$ ) olmak üzere

$$A = \begin{bmatrix} 1+a & a & a & a \\ b & 1+b & b & b \\ c & c & 1+c & c \\ d & d & d & 1+d \end{bmatrix}$$

eşitliğiyle verilen matrisin determinantını hesaplayınız.

8.  $A \in \mathbb{R}_3^3$  ve  $\det A = 2$  olduğuna göre  $\det (\text{Adj} A)$  değerini bulunuz.

## 2.3 Lineer denklem sistemleri

**Tanım 2.3.1**  $a_1, a_2, \dots, a_n, b \in \mathbb{R}$  ( $n \geq 1$ ) ve  $x_1, x_2, \dots, x_n$  bilinmeyenler olmak üzere

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

ifadesine  $n$  bilinmeyenli lineer (doğrusal) bir denklem denir.

**Örnek 2.3.2**

$$ax = b$$

1 bilinmeyenli lineer bir denklemdir ve  $a \neq 0$  olduğunda bu denklemin çözümü  $x = -\frac{b}{a}$  dir.

**Örnek 2.3.3**

$$x - 3y + 2z = 4$$

eşitliği, 3 bilinmeyenli bir lineer denklemdir. Bu denklemin çözümü

$$x = t, \quad y = k \quad \text{ve} \quad z = 4 - t + 3k$$

dir, burada  $t, k$  parametrelerdir.

**Tanım 2.3.4**  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ( $n \geq 2$ ) ler bilinmeyenler ve  $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$  reel skaller olmak üzere

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

şeklinde bir sisteme  $n$ -bilinmeyenli  $m$  tane denklemden oluşan **lineer denklem sistemi** denir. Bu lineer denklem sistem kısaca

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, \quad 1 \leq i \leq m$$

şeklinde de ifade edilir. Eğer  $b_i$  değerlerinin hepsi sıfır ise sisteme **homojen**; en az bir  $b_i$  değeri sıfırdan farklı ise sisteme **homojen olmayan lineer denklem sistemi** adı verilir.

**Tanım 2.3.5** Bir lineer denklem sistemini sağlayan  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sayıları bulunamıyorsa bu denklem sistemine **tutarsız denklem sistemi** denir. Aksi durumda, yani en az birer tane  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sayıları bulunabiliyorsa bu denklem sistemine **tutarlı denklem sistemi** denir.

**Gösterim 2.3.6** (2.4) ile verilen lineer denklem sistemi matrisler yardımıyla

$$AX = B \quad (2.5)$$

şeklinde de ifade edilebilir, burada

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n \times 1}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}_{m \times 1}$$

dir. Ayrıca  $A$  ya (2.4) lineer denklem sisteminin **katsayılar matrisi** denir. (2.5) ifadesi açık bir şekilde

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n \times 1} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}_{m \times 1}$$

şeklinde gösterilir.

**Tanım 2.3.7**

$$\left[ A : B \right] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \vdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & \vdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & \vdots & b_m \end{bmatrix}_{m \times (n+1)}$$

matrisine (2.4) lineer denklem sisteminin **ilaveli katsayılar matrisi** adı verilir.

**Örnek 2.3.8**

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 &= 5 \\ -2x_1 + x_3 &= 7 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_4 &= 3 \end{aligned}$$

lineer denklem sistemi verilsin. Bunu matris formunda ifade edip ilaveli katsayılar matrisini bulalım:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -4 \end{bmatrix}}_{A \quad 3 \times 4} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{X \quad 4 \times 1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}}_{B \quad 3 \times 1}$$

olduğundan ilaveli katsayılar matrisi

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 & \vdots & 5 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & \vdots & 7 \\ 3 & 2 & 0 & -4 & \vdots & 3 \end{bmatrix}_{3 \times 6}$$

dir.



### 2.3.1 Katsayılar matrisinin tersi yardımıyla lineer denklem sisteminin çözümü

$AX = B$  lineer denklem sistemi verilsin.  $A$  regüler ise, yani  $A^{-1}$  mevcut ise

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B$$

olmak üzere

$$X = A^{-1}B$$

çözümü mevcuttur.

**Uyarı 2.3.9** *Bu metot katsayılar matrisinin regülerliği sayesinde uygulandığından,  $A$  matrisi karesel ve determinantı sıfırdan farklı olmak zorundadır.*

#### Örnek 2.3.10

$$x - 2y + 3z = 4$$

$$2x + y - z = -1$$

$$x + y + z = 3$$

lineer denklem sistemini çözelim. Öncelikle  $AX = B$  şeklinde matris formunda yazılacak olursa

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

olur.  $A$  matrisinin regülerliğini kontrol edebilmek için  $A$  nın determinantını hesaplayalım. Bunun için birinci satıra Laplace açılımı uygulanırsa:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 11 \neq 0$$

bulunur. Ayrıca  $A$  nın tersi için

$$\text{adj}A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -3 & -2 & 7 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

olduğundan

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}A}{\det A} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -3 & -2 & 7 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

bulunur. Buna göre

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -3 & -2 & 7 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

elde edilir, yani  $x = 0$ ,  $y = 1$ ,  $z = 2$  dir.

### Örnek 2.3.11

$$x + 2y + 3z = 2$$

$$2x + 3y + 4z = -2$$

$$x + 5y + 7z = 4$$

lineer denklem sistemini çözelim. Bir önceki örnekte olduğu gibi  $AX = B$  ve

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

dir.  $\det A = 2 \neq 0$  olduğundan  $A^{-1}$  mevcuttur ve

$$\text{adj}A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -10 & 4 & 2 \\ 7 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

olur. Böylece

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}A}{\det A} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -10 & 4 & 2 \\ 7 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

olup

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -10 & 4 & 2 \\ 7 & -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -10 \\ 8 \end{bmatrix}$$

elde edilir, yani  $x = -2$ ,  $y = -10$ ,  $z = 8$  dir.

### 2.3.2 Gauss ve Gauss-Jordan yoketme metotları

Bir  $AX = B$  lineer denklem sistemi ve bu lineer denklem sisteminin ilaveli katsayılar matrisi  $\begin{bmatrix} A:B \end{bmatrix}$  verilsin. Bahsi edilen metot aşağıdaki adımlar takip edilerek uygulanabilir:

1.  $\begin{bmatrix} A:B \end{bmatrix}$  matrisine elemanter satır operasyonları uygulamak suretiyle elde edilen matris  $\begin{bmatrix} C:D \end{bmatrix}$  olsun.
2.  $\begin{bmatrix} A:B \end{bmatrix}$  ve  $\begin{bmatrix} C:D \end{bmatrix}$  matrisleri denk olduğundan bunlara karşılık gelen  $AX = B$  ve  $CX = D$  lineer denklem sistemleri de birbirine denk olur.
3. Bu lineer denklem sistemleri aynı çözüme sahiptir.

**Tanım 2.3.12**  $\begin{bmatrix} A:B \end{bmatrix}$  matrisinden  $\begin{bmatrix} C:D \end{bmatrix}$  matrisini satırca eşolon formunda veren metoda **Gauss yoketme**;  $\begin{bmatrix} C:D \end{bmatrix}$  matrisini satırca indirgenmiş eşolon formunda veren metoda ise **Gauss-Jordan yoketme metodu** denir.

Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Alman matematikçi. Gelmiş geçmiş en büyük matematikçilerden birisi!



Resim-6: Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

Wilhelm Jordan (1842-1899). Alman mühendis.



Resim-7: Wilhelm Jordan (1842-1899)

### Örnek 2.3.13

$$x + 2y - z = -6$$

$$3x - y + 2z = 11$$

$$2x + 5y - 4z = -20$$

lineer denklem sistemini Gauss-Jordan yoketme metodu ile inceleyelim. Bunun için

$$\left[ A:B \right] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & : & -6 \\ 3 & -1 & 2 & : & 11 \\ 2 & 5 & -4 & : & -20 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \varepsilon_1: \alpha_2 \rightarrow \alpha_2 - 3\alpha_1 \\ \approx \\ \varepsilon_2: \alpha_3 \rightarrow \alpha_3 - 2\alpha_1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & : & -6 \\ 0 & -7 & 5 & : & 29 \\ 0 & 1 & -2 & : & -8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \varepsilon_3: \alpha_2 \rightarrow \alpha_2 + 7\alpha_3 \\ \approx \\ \varepsilon_4: \alpha_1 \rightarrow \alpha_1 - 2\alpha_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & : & 10 \\ 0 & 0 & -9 & : & -27 \\ 0 & 1 & -2 & : & -8 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \varepsilon_5: \alpha_2 \rightarrow \frac{-1}{9}\alpha_2 \\ \approx \\ \varepsilon_6: \alpha_3 \leftrightarrow \alpha_2 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & : & 10 \\ 0 & 1 & -2 & : & -8 \\ 0 & 0 & 1 & : & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \varepsilon_7: \alpha_2 \rightarrow \alpha_2 + 2\alpha_3 \\ \approx \\ \varepsilon_8: \alpha_1 \leftrightarrow \alpha_1 - 3\alpha_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & : & 1 \\ 0 & 1 & 0 & : & -2 \\ 0 & 0 & 1 & : & 3 \end{bmatrix}$$

elde edilir ki verilen lineer denklem sisteme denk olan lineer denklem sistemi

$$x = 1$$

$$y = -2$$

$$z = 3$$

şeklindedir. Bu ise sistemin çözümünü temsil eder.

### Örnek 2.3.14

$$2x_1 + x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 1$$

$$x_1 + 3x_3 = 0$$

$$7x_1 + x_2 + 21x_3 + 2x_4 = 1$$

$$2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 6x_4 = 3$$

lineer denklem sistemini Gauss-Jordan yoketme metodu ile inceleyelim. Bunun için

$$\begin{aligned}
 \left[ A:B \right] &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 & 2 & : & 1 \\ \mathbf{1} & 0 & 3 & 0 & : & 0 \\ 7 & 1 & 21 & 2 & : & 1 \\ 2 & 3 & 6 & 6 & : & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\approx]{\varepsilon_1: \alpha_1 \rightarrow \alpha_2} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 3 & 0 & : & 0 \\ 2 & 1 & 6 & 2 & : & 1 \\ 7 & 1 & 21 & 2 & : & 1 \\ 2 & 3 & 6 & 6 & : & 3 \end{bmatrix} \\
 &\xrightarrow[\approx]{\substack{\varepsilon_2: \alpha_2 \rightarrow \alpha_2 - 2\alpha_1 \\ \varepsilon_3: \alpha_3 \rightarrow \alpha_3 - 7\alpha_1 \\ \varepsilon_4: \alpha_4 \rightarrow \alpha_4 - 2\alpha_1}} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 3 & 0 & : & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 2 & : & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & : & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 6 & : & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\approx]{\varepsilon_5: \alpha_3 \rightarrow \alpha_3 - \alpha_2} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 3 & 0 & : & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 2 & : & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 6 & : & 3 \end{bmatrix} \\
 &\xrightarrow[\approx]{\varepsilon_6: \alpha_4 \rightarrow \alpha_4 - 3\alpha_2} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 3 & 0 & : & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 2 & : & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

olduğundan verilen denklem sistemi,

$$x_1 + 0x_2 + 3x_3 + 0x_4 = 0$$

$$0x_1 + x_2 + 0x_3 + 2x_4 = 1$$

denklem sistemine denktir.  $x_3 = k$ ,  $x_4 = t$  denirse  $x_1$  ve  $x_2$  bilinmeyenleri  $x_1 = -3k$  ve  $x_2 = 1 - 2t$  olur ki çözümler

$$x_1 = -3k, \quad x_2 = 1 - 2t, \quad x_3 = k, \quad x_4 = t$$

şeklinde elde edilir.

**Uyarı 2.3.15** Yukarıda ifade edilen metot için eğer,

1.  $\text{rank} A \neq \text{rank} \left[ A:B \right]$  ise sistemin çözümü yoktur.

2.  $\text{rank} A = \text{rank} \begin{bmatrix} A:B \end{bmatrix}$  ise sistemin çözümü vardır. Bu durumda  $\text{rank} A = r$  için

(a)  $r = n$  ise tek çözüm,

(b)  $r < n$  ise sonsuz çözüm vardır. Bu çözümler  $n - r$  parametreye bağlı olarak bulunur.

Yukarıdaki örneklere bakıldığında ilk örneğin katsayılar matrisinin rankı  $r = 3$  olup  $n = r$  olduğundan tek çözüm; ikinci örnekte ise  $r = 2 < n$  olduğundan sonsuz çözüm vardır ve bu çözümler  $n - r = 2$  parametreye bağlıdır.

### Örnek 2.3.16

$$2x + 5y - z = 1$$

$$x + 3y + 3z = 0$$

$$4x + 11y + 5z = 1$$

lineer denklem sistemini Gauss yoketme metodu ile inceleyelim. Bunun için

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A:B \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 & : & 1 \\ 1 & 3 & 3 & : & 0 \\ 4 & 11 & 5 & : & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\varepsilon_1: \alpha_1 \rightarrow \alpha_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & : & 0 \\ 2 & 5 & -1 & : & 1 \\ 4 & 11 & 5 & : & 1 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{\substack{\varepsilon_2: \alpha_2 \rightarrow \alpha_2 - 2\alpha_1 \\ \varepsilon_3: \alpha_3 \rightarrow \alpha_3 - 4\alpha_1}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & : & 0 \\ 0 & -1 & -7 & : & 1 \\ 0 & -1 & -7 & : & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\varepsilon_4: \alpha_3 \rightarrow \alpha_3 - \alpha_2 \\ \varepsilon_5: \alpha_2 \rightarrow -\alpha_2}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & : & 0 \\ 0 & 1 & 7 & : & -1 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olup verilen lineer denklem sistemine denk olan sistem

$$x + 3y + 3z = 0$$

$$0x + y + 7z = -1$$

$$0x + 0y + 0z = 0$$

şeklindedir. Son sistemde ilk iki denklemin çözümlerinin son denklemi sağladığı açıktır. Ayrıca  $z = t$  denirse istenilen çözümler

$$x = 3 + 18t, \quad y = -1 - 7t, \quad z = t$$

şeklinde olur.

### Örnek 2.3.17

$$x + y - z = 5$$

$$2x + 3y + 2z = -2$$

$$3x + 4y + z = 2$$

lineer denklem sistemini Gauss yoketme motodu ile inceleyelim. Bunun için

$$\begin{aligned} [A:B] &= \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & -\mathbf{1} & \vdots & \mathbf{5} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{2} & \vdots & -\mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{1} & \vdots & \mathbf{2} \end{bmatrix} \xrightarrow[\varepsilon_2: \alpha_3 \rightarrow \alpha_3 - 3\alpha_1]{\varepsilon_1: \alpha_2 \rightarrow \alpha_2 - 2\alpha_1} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & -\mathbf{1} & \vdots & \mathbf{5} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{4} & \vdots & -\mathbf{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{4} & \vdots & -\mathbf{13} \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow[\varepsilon_4: \alpha_3 \rightarrow \alpha_3 - \alpha_2]{\varepsilon_3: \alpha_1 \rightarrow \alpha_1 - \alpha_2} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & -\mathbf{5} & \vdots & \mathbf{17} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{4} & \vdots & -\mathbf{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \vdots & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olur. O halde verilen lineer denklem sistemine denk olan lineer denklem sistem

$$x - 5z = 17$$

$$x + 4z = -12$$

$$0x + 0y + 0z = -1$$

şeklindedir.  $0x + 0y + 0z \neq -1$  olduğundan bu lineer denklem sistemi tutarsızdır ve çözümü yoktur.

### 2.3.3 Homojen lineer denklem sistemi

**Tanım 2.3.18**  $A$ ,  $m \times n$  tipinde bir matris olmak üzere  $AX = 0$  şeklinde verilen bir homojen denklem sistemi daima  $X = 0$  için sağlanır.  $X = 0$  çözümüne sistemin **aşık** çözümü ve  $X \neq 0$  çözümlerine de sistemin **aşık olmayan çözümü** denir.



**Örnek 2.3.19**

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

$$x_1 + x_4 = 0$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$$

homojen lineer denklem sistemi verilsin. Bu lineer denklem sistemini Gauss-Jordan metodu ile irdeleyelim. Buna göre

$$\begin{aligned} \left[ A : 0 \right] &= \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 & : & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & : & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & : & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\varepsilon_2: \alpha_2 \rightarrow \alpha_2 - \alpha_3]{\varepsilon_1: \alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 1 & : & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & : & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & : & 0 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow[\varepsilon_4: \alpha_3 \rightarrow \alpha_3 - \alpha_1]{\varepsilon_3: \alpha_2 \rightarrow -1\alpha_2} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 1 & : & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -1 & : & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & : & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\varepsilon_5: \alpha_3 \rightarrow \alpha_3 - 2\alpha_2} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 1 & : & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -1 & : & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & : & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olmak üzere verilen sisteme denk olan sistem

$$1x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 1x_4 = 0$$

$$1x_2 + (-1)x_4 = 0$$

$$1x_3 + 1x_4 = 0$$

olur ki çözümler  $x_1 = r$ ,  $x_2 = -r$ ,  $x_3 = r$ ,  $x_4 = -r$  şeklinde elde edilir.

**Teorem 2.3.20**  $A$ ,  $m \times n$  tipinde bir matris ve  $m < n$  olsun. Bu taktirde  $AX = 0$  homojen sisteminin aşikar olmayan bir çözümü vardır.

**Örnek 2.3.21** Yukarıdaki örnekte sistemin katsayılar matrisi

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde olup satır sayısı sütun sayısından küçük olduğundan aşikar olmayan bir çözüme sahiptir.

**Uyarı 2.3.22** *Daima  $\text{rank}A = \text{rank} \begin{bmatrix} A \\ 0 \end{bmatrix} = r$  olduğundan homojen lineer denklem sisteminin çözümü vardır. Eğer  $r = n$  ise sistemin tek çözümü (sıfır çözümü) ve  $r < n$  ise sistemin  $n - r$  parametreye bağlı sonsuz çözümü vardır.*

Gerçekten de yukarıdaki örnekte katsayılar matrisi

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olup, rankı 3 olduğundan  $n - r = 4 - 3 = 1$  parametreye bağlı bir çözüm vardır.

**Teorem 2.3.23**  *$A$ ,  $n \times n$  tipinde bir matris ve  $AX = 0$  homojen lineer denklem sisteminin sadece  $X = 0$  aşikar çözümü varsa  $A$  matrisi  $I_n$  birim matrisine satırca denktir.*

Bu teorem aşağıdaki örnek yardımıyla daha da netleşebilir:

**Örnek 2.3.24** *Sadece aşikar çözüme sahip olan*

$$x + y + z = 0$$

$$x + z = 0$$

$$2x + 2y + 3z = 0$$

*homojen lineer denklem sisteminin katsayılar matrisinin  $I_3$  birim matrisine satırca denk olduğunu gösterelim.*

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 & : & 0 \\ 1 & 0 & 0 & : & 0 \\ 2 & 2 & 1 & : & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\varepsilon_2: \alpha_2 \rightarrow -\alpha_2]{\varepsilon_1: \alpha_2 \leftrightarrow \alpha_2 - \alpha_1} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & : & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & : & 0 \\ 1 & 2 & 1 & : & 0 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow[\varepsilon_3: \alpha_3 \leftrightarrow \alpha_3 - \alpha_1]{\varepsilon_4: \alpha_3 \leftrightarrow \alpha_3 - 2\alpha_2} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & : & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & : & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & : & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

*olduğu görülür.*

**Sonuç 2.3.25** Eğer  $A$ ,  $m \times n$  tipinde bir matris ve  $AX = 0$  sistemi sadece aşıkâr çözüme sahip ise  $m \geq n$  dir.

### 2.3.4 Cramer denklem sistemleri

**Tanım 2.3.26**  $A$ ,  $m \times n$  tipinde bir matris olmak üzere  $AX = B$  lineer denklem sistemi verilsin. Eğer  $m = n$  ve  $\det A \neq 0$  ise  $AX = B$  lineer denklem sistemine **Cramer denklem sistemi** adı verilir.

**Örnek 2.3.27**

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 7 & 5 & 6 & 1 \\ -3 & -3 & 3 & 3 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 7 & 5 \\ -4 & -4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisleri için  $A_1X = B$  sistemi Cramer denklem sistemi iken,  $A_2X = B$  ve  $A_3X = B$  Cramer olmayan denklem sistemleridir.

**Teorem 2.3.28 (Cramer Yöntemi)**  $AX = B$  veya daha açık şekilde

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

denklem sistemi verilsin.  $\det A \neq 0$  ise  $AX = B$  lineer denklem sisteminin bir tek  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  çözümü vardır ve bu çözüm

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}$$

olmak üzere

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\det A}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\det A}, \dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\det A}$$

dir.

Gabriel Cramer (1704-1752). İsviçreli matematikçi.



Resim-8: Gabriel Cramer (1704-1752)

### Örnek 2.3.29

$$2x + y = 5$$

$$-x + 3y = 1$$

lineer denklem sisteminin çözümünü bulalım. Sistemin katsayılar matrisi

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \det A = 7 \neq 0$$

olduğundan Cramer yöntemi ile denklem sisteminin tek bir çözümü vardır:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}{\det A} = 2, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{\det A} = 1$$

elde edilir.

**Örnek 2.3.30**

$$-2x + 3y - z = 1$$

$$x + 2y - z = 4$$

$$-2x - y + z = -3$$

lineer denklem sisteminin çözümünü bulalım. Sistemin katsayılar matrisi

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

olmak üzere  $\det A = -2 \neq 0$  olduğundan Cramer yöntemi ile denklem sisteminin tek bir çözümü vardır:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{\det A} = 2, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix}}{\det A} = 3, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & -3 \end{vmatrix}}{\det A} = 4$$

bulunur.

**Örnek 2.3.31**

$$x - 3y + 4z = -4$$

$$2x + y = 7$$

$$3x - y + z = 7$$

lineer denklem sisteminin çözümünü bulalım. Sistemin katsayılar matrisi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

olmak üzere  $\det A = -13 \neq 0$  olduğundan Cramer yöntemi ile denklem sisteminin tek bir çözümü vardır:

$$x = \frac{\begin{bmatrix} -4 & -3 & 4 \\ 7 & 1 & 0 \\ 7 & -1 & 1 \end{bmatrix}}{\det A} = 3, \quad y = \frac{\begin{bmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 2 & 7 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \end{bmatrix}}{\det A} = 1, \quad z = \frac{\begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 2 & 1 & 7 \\ 3 & -1 & 7 \end{bmatrix}}{\det A} = -1$$

bulunur.

### 2.3.5 Bölüm sonu alıştırmaları

1. Aşağıdaki denklemlerin çözümlerini belirtiniz:

(a)  $3x + 4y = 2$ ,

(b)  $2x + y + 4z = 8$ ,

(c)  $-2x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 0$ .

2. Aşağıdaki denklem sistemlerini Gauss yoketme yöntemiyle çözünüz:

(a)

$$\begin{aligned} 3x + 4y &= 2 \\ 2x - y &= 5 \end{aligned} ,$$

(b)

$$\begin{aligned} 5x + 15y &= 2 \\ 7x + 21y &= 1 \end{aligned} ,$$

(c)

$$\begin{aligned} -4x + 12y &= -8 \\ 6x - 18y &= 12 \end{aligned} ,$$

(d)

$$\begin{aligned} 2x + 5y - 4z &= 0 \\ -x - 3y + z &= 6 \end{aligned} ,$$

(e)

$$\begin{aligned}2x + 3y - 5z &= 2 \\ -4x - 6y + 10z &= -4\end{aligned}$$

3. Aşağıdaki denklem sistemlerini Gauss yoketme yöntemiyle çözünüz:

(a)

$$\begin{aligned}x - 2y + z &= 3 \\ -x + 2z &= 1, \\ 3x + y + 2z &= 14\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}2x + 3y - 5z &= -8 \\ x - 4y + 3z &= 7, \\ 3x + y + z &= 0\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}2x - y + 3z &= 0 \\ 3x + 4y + z &= 0, \\ -x + 2y + 4z &= 0\end{aligned}$$

4. Aşağıdaki denklem sistemlerini Gauss-Jordan yoketme yöntemiyle çözünüz:

(a)

$$\begin{aligned}2x + 3y + 5z &= 7 \\ -2x - 5y - 11z &= 9, \\ x + 2y + 4z &= -4\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}x - 2y + z &= -7 \\ -x + y - 3z &= 4, \\ 2x - y + 8z &= -5\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= -1 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 &= 4 \\ -3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 &= 8 \\ 4x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 + x_3 + 5x_4 &= -1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 7x_4 &= 4 \\ 3x_1 + x_3 + 7x_4 &= 5 \\ 2x_1 + x_2 + 7x_4 &= 1 \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 &= -6 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4 &= 9 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= -3 \end{aligned}$$

denklem sistemini çözünüz.

6.

$$\begin{aligned} -x + 3y &= 2 \\ 2x - 6y &= c \end{aligned}$$

lineer denklem sistemi veriliyor.

- (a)  $c$  sayısının hangi değerleri için verilen denklem sistemi tutarsız olur?
- (b)  $c$  sayısının hangi değerleri için verilen denklem sisteminin sonsuz sayıda çözümü vardır?
- (c)  $c$  sayısının hangi değerleri için verilen denklem sisteminin bir tek çözümü vardır?



7.  $a, b \in \mathbb{R}$  olmak üzere

$$2x + ay = 1$$

$$4x + by = 0$$

lineer denklem sistemi veriliyor. Bu lineer denklem sisteminin çözümünü  $a$  ve  $b$  sayılarının durumuna göre irdelleyiniz.

8.

$$x + cy = 1$$

$$x + y + dz = c + d ,$$

$$2x + 2cy + z = 3$$

lineer denklem sistemi veriliyor.

- (a)  $c$  ve  $d$  sayılarının hangi değerleri için verilen denklem sisteminin bir tek çözümü vardır?
- (b)  $c$  ve  $d$  sayılarının hangi değerleri için verilen denklem sisteminin sonsuz sayıda çözümü vardır?
- (c)  $c$  ve  $d$  sayılarının hangi değerleri için verilen denklem sistemi tutarsız olur?

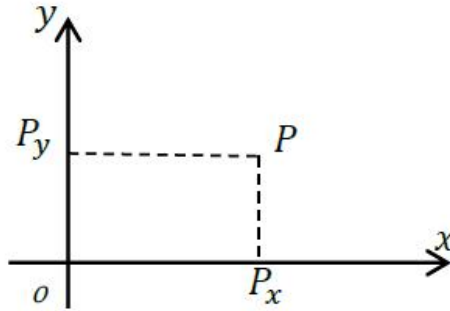


## Bölüm 3

# Vektör Uzayları

### 3.1 Düzlemde vektörler

$\mathbb{R}$  ile reel sayılar kümesi gösterilsin. Bu küme bir doğru ile birebir eşlenebilir. Düzlemin bir  $O$  noktasında, Şekil-1 deki gibi, dik olarak kesişen iki doğru reel sayılarla eşlenmiş olsun.



Şekil-1: Koordinat eksenleri

Dik koordinat eksenleri denilen bu doğruları  $x$  ve  $y$  ile gösterelim ve  $\mathbb{R}$  nin kendisiyle kartezyen çarpımından meydana gelen

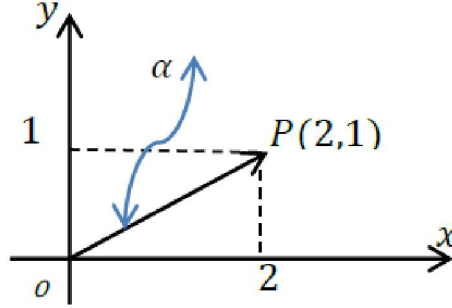
$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

kümesini ele alalım. Buna göre, düzlemde seçilen dik koordinat eksenlerinden yararlanarak düzlem ve  $\mathbb{R}^2$  arasında birebir bir eşleme kurulabilir:

Düzlemde bir  $P$  noktası verildiğinde;  $P$  den geçen ve  $y$  doğrusuna paralel olan doğrunun  $x$  eksenini kestiği nokta  $P_x$  ile ve benzer şekilde  $P$  den geçen ve  $x$  doğrusuna paralel olan doğrunun  $y$  eksenini kestiği nokta  $P_y$  ile gösterilsin. Böylece düzlemin her noktasına bir  $(P_x, P_y)$  ikilisi karşılık getirilmiş olur.

$\mathbb{R}^2$  kümesine düzlemin yanı sıra 2-boyutlu uzay adı da verilmektedir. Burada ismi geçen boyut kavramı daha sonra izah edilecektir.

Fizikte, vektörlerden hem büyüklük hem de yöne sahip olan nicelikler olarak bahsedilir. Ancak Matematikte, bu kavramlar sayılar ve indisler yardımıyla ifade edilir. Daha açık bir ifadeyle  $\mathbb{R}^2$  de bir  $\alpha = (a_1, a_2)$  ikilisine *vektör* adı verilir.



Şekil-2: Düzlemde vektörler

Burada  $\alpha$  vektörüne  $P$  noktasının *konum vektörü* de denilmektedir.

**Tanım 3.1.1**  $\mathbb{R}^2$  düzleminde vektörler arasında *toplama ve skalerle çarpma* denilen işlemler aşağıdaki gibi ifade edilir:

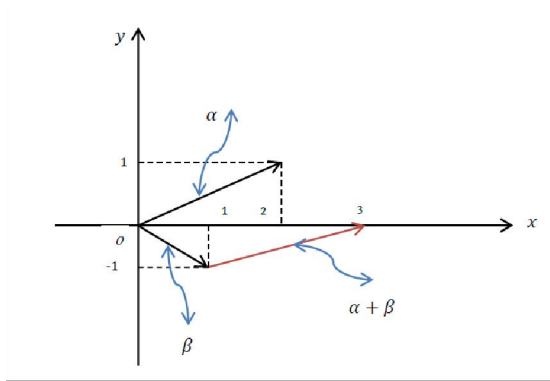
- $\oplus : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \alpha = (a_1, a_2), \beta = (b_1, b_2),$

$$\alpha \oplus \beta = (a_1 + b_1, a_2 + b_2).$$

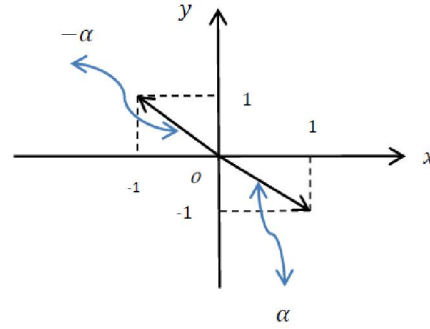
- $\odot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \alpha = (a_1, a_2), c \in \mathbb{R}, c.\alpha = (ca_1, ca_2).$

Bundan sonra vektörler için toplama skalerle çarpma işlemleri basitçe +

ve . ile gösterilecektir



Şekil-3: Vektörlerde toplama



Şekil-4: Skalerle çarpma

**Tanım 3.1.2** Düzlemde  $\alpha = (a_1, a_2)$ ,  $\beta = (b_1, b_2)$  vektörlerinin **eşitliği**

$$\alpha = \beta \iff a_1 = b_1 \text{ ve } a_2 = b_2$$

şeklindedir.

**Tanım 3.1.3**  $\mathbb{R}^2$  düzleminde bir  $\alpha = (a_1, a_2)$  vektörünün **uzunluğu**

$$\|\alpha\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

ile;  $\alpha = (a_1, a_2)$  ve  $\beta = (b_1, b_2)$  vektörleri arasındaki **uzunluk** ise

$$d(\alpha, \beta) = \|\alpha - \beta\| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$$

pozitif reel sayıları ile ifade edilir.

Böylece  $\mathbb{R}^2$  düzleminde vektörler için tanımlanan toplama ve skalerle çarpma işlemleri aşağıdaki özellikleri sağlarlar:

V1 Değişme özelliği:  $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ ;

V2 Birleşme özelliği:  $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$ ;

V3 Birim eleman:  $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$ ,  $0 \in \mathbb{R}^2$ ;

V4 Ters eleman:  $\alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = 0$ ;

V5 Dağılma özelliği:  $c.(\alpha + \beta) = c.\alpha + c.\beta$ ,  $c \in \mathbb{R}$ ;

V6 Dağılma özelliği:  $(c + d).\alpha = c.\alpha + d.\alpha$ ,  $c, d \in \mathbb{R}$ ;

V7 Birleşme özelliği:  $c.(d.\alpha) = cd.\alpha$ ;

V8 Birim eleman:  $1.\alpha = \alpha$ .

Düzlemde vektörler kavramı sonraki bölümlerde vektör uzaylarına genelleştirilecektir.

### 3.1.1 Bölüm sonu alıştırmaları

1.  $\alpha = (2, 0)$ ,  $\beta = (-3, 4)$  ve  $\gamma = (3, -2)$  vektörler için  $\alpha - \beta - \gamma$  vektörünün bileşenlerini hesaplayınız.

2.  $\alpha = (2^{m+4}, 3)$ ,  $\beta = (\frac{1}{4}, 27^m)$  ve  $\alpha = \beta$  ise  $\frac{m}{n}$  oranı kaçtır?

3.  $\alpha = (2, 5)$ ,  $\beta = (-3, -4)$  ve  $\gamma = (-5, -2)$  vektörler için eğer

$$\gamma = c.\alpha + d.\beta, \quad c, d \in \mathbb{R},$$

ise  $c + d$  toplamı kaçtır?

4.  $\alpha = (3, 4)$  ve  $\beta = (-1, m)$  vektörleri için eğer

$$c.\alpha + d.\beta = 0, \quad c, d \in \mathbb{R},$$

ise  $m$  kaçtır?

5.  $\alpha = (4, 2)$  ve  $\beta = (1, -2)$  vektörleri için  $d(\alpha, \beta)$  uzunluğunu hesaplayınız.

## 3.2 Reel vektör uzayları

**Tanım 3.2.1**  $\mathbb{V} \neq \emptyset$  boştan farklı bir küme olsun. Eğer  $\mathbb{V}$  üzerinde

$$+ : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}, \quad . : \mathbb{R} \times \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$$

toplama ve skalerle çarpma işlemleri yukarıdaki V1-V8 özelliklerini sağlarsa,  $\mathbb{V}$  kümesine bir **reel vektör uzayı** ve  $\mathbb{V}$  nin her bir elemanına da **vektör** adı verilir.

**Örnek 3.2.2**  $\mathbb{R}$  reel sayılar kümesi üzerinde bilinen toplama  $+$  ve çarpma  $\cdot$  işlemleri ile birlikte  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  üçlüsü bir reel vektör uzayıdır. Gerçekten de bu işlemlerin V1-V8 özelliklerini sağladığı açıktır.

**Örnek 3.2.3**  $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n\text{-tane}} = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$  kümesi üzerinde aşağıdaki gibi tanımlanan toplama  $+$  ve çarpma  $\cdot$  işlemleri ile birlikte  $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$  üçlüsü bir reel vektör uzayıdır. Bu vektör uzayına **standart reel vektör uzayı** denir.  $\alpha = (a_1, \dots, a_n)$ ,  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $c \in \mathbb{R}$  için

$$\alpha + \beta = (a_1 + \beta_1, \dots, a_n + \beta_n), \quad c \cdot \alpha = (ca_1, \dots, ca_n).$$

**Örnek 3.2.4**  $\mathbb{P}_n = \{\text{derecesi } \leq n \text{ olan polinomlar}\}$  kümesi üzerinde aşağıda gibi tanımlanan polinomların toplama  $+$  ve skalerle çarpma  $\cdot$  işlemleri birlikte  $(\mathbb{P}_n, +, \cdot)$  üçlüsü bir reel vektör uzayıdır:  $\mathbb{P}_n$  de  $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ ,  $q(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n$  ve  $c \in \mathbb{R}$  için

$$\begin{cases} p(x) + q(x) = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_n + b_n)x^n, \\ c \cdot p(x) = ca_0 + ca_1x + \dots + ca_nx^n. \end{cases}$$

**Örnek 3.2.5**  $\mathbb{S} = \{f \mid f : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\text{sürekli}} \mathbb{R}\}$  reel değerli sürekli fonksiyonların kümesi üzerinde aşağıdaki gibi verilen fonksiyonların toplama  $+$  ve skalerle çarpma  $\cdot$  işlemleri ile birlikte  $(\mathbb{S}, +, \cdot)$  üçlüsü bir vektör uzayıdır:

$$\begin{cases} (f + g)(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) + g(x_1, \dots, x_n), \\ (c \cdot f)(x_1, \dots, x_n) = cf(x_1, \dots, x_n), \end{cases}$$

**Örnek 3.2.6**  $\mathbb{R}_n^m$ ,  $m \times n$ -tipindeki matrislerin kümesi üzerinde aşağıdaki gibi verilen matrislerin toplama  $+$  ve skalerle çarpma  $\cdot$  işlemleri ile birlikte  $(\mathbb{R}_n^m, +, \cdot)$  üçlüsü bir reel vektör uzayıdır:  $A = (a_{ij})$ ,  $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}_n^m$ ,  $c \in \mathbb{R}$ ,

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}), \quad c \cdot A = (ca_{ij}).$$

**Örnek 3.2.7**  $\mathbb{Z}$  tam sayılar kümesi bir reel vektör uzayı değildir. Çünkü her  $\alpha \in \mathbb{Z}$  ve  $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$  için  $\sqrt{2} \cdot \alpha \notin \mathbb{Z}$  olduğundan skalerle çarpım işlemi tanımlı değildir.

**Uyarı 3.2.8**  $\mathbb{R}^n$  uzayında vektörler  $\alpha = (a_1, \dots, a_n)$  gösteriminin yanı sıra

$$\alpha = (a_1, \dots, a_n)^T = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

şeklinde bir sütun matrisi olarak da ifade edilir.

**Tanım 3.2.9**  $\mathbb{V}$  vektör uzayı ve üzerinde aşağıdaki işlem tanımlansın:

$$\odot : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}, \alpha \odot \beta.$$

Eğer her  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{V}$  ve  $c, d \in \mathbb{R}$  için

1.  $(c.\alpha + d.\beta) \odot \gamma = c.\alpha \odot \gamma + d.\beta \odot \gamma$
2.  $\alpha \odot (c.\beta + d.\gamma) = c.\alpha \odot \beta + d.\alpha \odot \gamma$   
özellikleri sağlanırsa  $\mathbb{V}$  vektör uzayına bir **cebir** adı verilir.

**Örnek 3.2.10**  $n \times n$  tipinde karesel matrislerin kümesi matris toplama ve skalerle çarpımı işlemlerinin yanı sıra **matris çarpımı** ile birlikte bir **cebirdir**. Gerçekten de matris çarpımı işlemi yukarıdaki 1 ve 2 nolu özellikleri sağlar. (Bakınız Teorem 2.1.27, (2) ve (3).)

### 3.2.1 Altuzaylar

**Tanım 3.2.11**  $\mathbb{W}$  bir vektör uzayı ve  $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{V}$  olsun. Eğer  $\mathbb{W}, \mathbb{V}$  de tanımlanan işlemlere göre (V1)-(V8) özelliklerini sağlarsa  $\mathbb{W}$  ya  $\mathbb{V}$  nin bir **alt vektör uzayı** ya da kısaca **altuzayı** denir.

**Örnek 3.2.12** Her vektör uzayının en az iki altuzayı vardır; kendisi ve  $\{0\}$  (Toplama işleminin birimi). Bu uzaylara **aşık altuzaylar** denir.

**Örnek 3.2.13**  $\mathbb{P}$  ile bütün polinomların kümesi gösterilsin. Buna göre

$$\mathbb{P}_2 = \{\text{derecesi} \leq 2 \text{ olan polinomlar}\}$$

kümesi  $\mathbb{P}$  nin bir altuzayı olur.



**Örnek 3.2.14**  $n \geq 1$  olmak üzere  $\mathbb{R}^{n-1}$  uzayı  $\mathbb{R}^n$  nin bir altuzayıdır.

**Teorem 3.2.15**  $\mathbb{V}$  bir vektör uzayı ve  $\mathbb{W} \neq \emptyset$ ,  $\mathbb{W} \subset \mathbb{V}$  olsun.  $\mathbb{W}$  nin  $\mathbb{V}$  nin bir altuzayı olması için aşağıdaki şartların sağlanması gerek ve yeterdir:

1.  $\alpha, \beta \in \mathbb{W} \implies \alpha + \beta \in \mathbb{W}$
2.  $c \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{W} \implies c.\alpha \in \mathbb{W}$ .

**Örnek 3.2.16** Aşağıda verilen kümenin  $\mathbb{R}^3$  ün bir altuzayı olduğunu gösterelim:

$$\mathbb{W} = \{(a_1, a_2, a_1 + a_2) : a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}.$$

$\alpha = (a_1, a_2, a_1 + a_2)$ ,  $\beta = (b_1, b_2, b_1 + b_2)$  olmak üzere

$$\alpha + \beta = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2))$$

olup  $\alpha + \beta \in \mathbb{W}$  dir. Ayrıca her  $c \in \mathbb{R}$  için

$$c.\alpha = (ca_1, ca_2, ca_1 + ca_2)$$

$c.\alpha \in \mathbb{W}$  olur ki bu  $\mathbb{W}$  nin  $\mathbb{R}^3$  nin bir altuzayı olduğunu gösterir.

**Örnek 3.2.17**  $A$ ,  $m \times n$  tipinde bir matris olsun.  $AX = 0$  homojen sisteminin bütün çözümlerinin bir altuzayı olduğunu gösterelim: Bütün çözümler

$$(x_1, \dots, x_n)^T = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

şeklinde olup  $\mathbb{R}^n$  de bir vektör ile temsil edilirler. O halde bu çözümlerin kümesi  $\mathbb{R}^n$  nin bir altkümesidir. Eğer  $X_1$  ve  $X_2$  iki çözümse

$$A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2 = 0 + 0 = 0$$

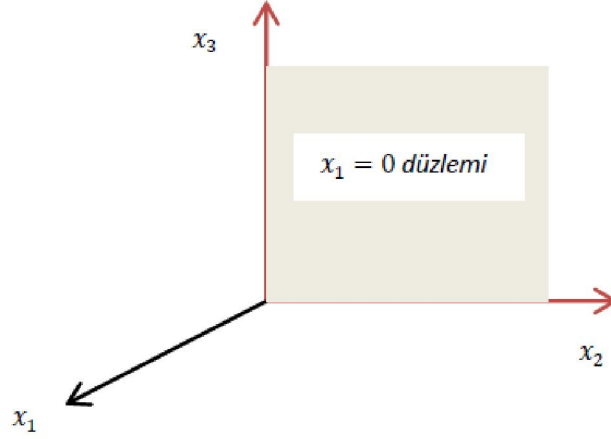
olup  $X_1 + X_2$  de bir çözüm olur. Ayrıca

$$A(cX_1) = c(AX_1) = c.0 = 0$$

olduğundan çözümler kümesi  $\mathbb{R}^n$  nin bir altuzayıdır. Bu uzaya homojen sistemin **çözüm uzayı** denir.

**Örnek 3.2.18**  $AX = B$ ,  $B \neq 0$ , sisteminin çözümlerinin  $\mathbb{R}^n$  nin bir altuzayı olmadığını bir alıştırma olarak gösteriniz.

**Örnek 3.2.19**  $\mathbb{R}^3$  uzayında  $x_1 = 0$  düzleminin bir altuzayı olduğunu gösterelim:



Şekil-5:  $x_1 = 0$  altuzayı.

$x_1 = 0$  düzlemi  $\{(0, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$  şeklinde ifade edilebilir. Bu düzlemde bulunan her  $\alpha, \beta$  vektörleri için

$$\alpha = (0, y_1, z_1), \beta = (0, y_2, z_2) \implies \alpha + \beta = (0, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

ve ayrıca  $c \in \mathbb{R}$  için

$$c \cdot \alpha = (0, cy_1, cz_1)$$

olduğundan  $x_1 = 0$  düzlemi  $\mathbb{R}^3$  nin bir altuzayıdır.

**Örnek 3.2.20**  $\mathbb{V}$  bir reel vektör uzayı olsun.  $\mathbb{V}$  içinde sabit  $\alpha_1, \alpha_2$  vektörleri için

$$\mathbb{S} = \{c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 : c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$$

kümesinin  $\mathbb{V}$  nin bir altuzayı olduğunu gösterelim. Her  $\beta_1 = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2$  ve  $\beta_2 = d_1\alpha_1 + d_2\alpha_2$  için

$$\beta_1 + \beta_2 = (c_1 + d_1)\alpha_1 + (c_2 + d_2)\alpha_2 \in \mathbb{S}$$

ve  $d \cdot \beta_1 = (dc_1)\alpha_1 + (dc_2)\alpha_2 \in \mathbb{S}$  olup  $\mathbb{S}$  kümesi  $\mathbb{V}$  nin altuzayı olur.

Bu kavram aşağıdaki gibi genelleştirilebilir:

**Tanım 3.2.21**  $\mathbb{V}$  bir reel vektör uzayı ve  $\mathbb{S} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset \mathbb{V}$  ise

$$\text{Span}(\mathbb{S}) = \{c_1 \cdot \alpha_1 + \dots + c_k \cdot \alpha_k : c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}\}$$

kümesi  $\mathbb{V}$  nin bir altuzayıdır (gösteriniz). Bu uzaya  $\mathbb{S}$  nin **ürettiği (gerdiği) uzay** adı verilir.

### 3.2.2 Lineer bağımlılık-bağımsızlık

**Tanım 3.2.22**  $\mathbb{V}$  bir vektör uzayı ve  $\mathbb{S} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \subset \mathbb{V}$  olsun. Eğer bir  $\alpha \in \mathbb{V}$  vektörü  $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$  için

$$\alpha = c_1 \cdot \alpha_1 + \dots + c_k \cdot \alpha_k$$

şeklinde yazılabiliyorsa,  $\alpha$  ya  $\mathbb{S}$  deki vektörlerin bir **lineer kombinasyonu (doğrusal birleşimi)** denir.

**Örnek 3.2.23**  $\mathbb{R}^3$  de  $\alpha = (2, 1, 5)$  vektörü  $\alpha_1 = (1, 2, 1)$ ,  $\alpha_2 = (1, 0, 2)$  ve  $\alpha_3 = (1, 1, 0)$  vektörlerinin bir lineer kombinasyonudur. Gerçekten

$$\alpha = c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2 + c_3 \alpha_3, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R},$$

denirse

$$c_1 + c_2 + c_3 = 2, \quad 2c_1 + c_3 = 1, \quad c_1 + 2c_2 = 5$$

sistemi çözüldükten sonra  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 2$ ,  $c_3 = -1$  bulunur ki bu

$$\alpha = \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3$$

olması demektir.

**Örnek 3.2.24**  $\mathbb{R}^3$  de  $\alpha_1 = (2, 1, 2)$ ,  $\alpha_2 = (1, 0, 1)$ ,  $\alpha_3 = (2, 1, 0)$  ve  $\alpha_4 = (1, 0, -1)$  verilsin.  $\alpha = (0, -2, 4)$  vektörünün  $\text{Span}\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$  kümesinde olup olmadığını inceleyelim: eğer

$$\alpha = c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2 + c_3 \alpha_3 + c_4 \alpha_4, \quad c_1, \dots, c_4 \in \mathbb{R},$$

yazılırsa, aşağıdaki sistem elde edilir:

$$2c_1 + c_2 + 2c_3 + c_4 = 0, \quad c_1 + c_3 = -2, \quad 2c_1 + c_2 - c_4 = 4.$$

Buradan  $c_1 = c_4$ ,  $c_2 = 4 - c_4$ ,  $c_3 = -2 - c_4$ , olup sonsuz miktarda  $c_1, \dots, c_4$  bulunur ki  $\alpha \in \text{Span}\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$  olması demektir.

**Tanım 3.2.25**  $\mathbb{V}$  bir reel vektör uzayı ve  $\mathbb{S} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \subset \mathbb{V}$  olsun. Eğer  $\mathbb{V}$  deki her bir vektör  $\mathbb{S}$  nin elemanlarının bir lineer kombinasyonu ise  $\mathbb{S}$  kümesi  $\mathbb{V}$  yi **üretir (gerer)** ya da  $\mathbb{V}$  uzayı  $\mathbb{S}$  tarafından **üretilir (gerilir)** denir.

**Örnek 3.2.26**  $\mathbb{R}^3$  uzayında  $\alpha_1 = (1, 2, 1)$ ,  $\alpha_2 = (1, 0, 2)$ ,  $\alpha_3 = (1, 1, 0)$  verilsin.  $\mathbb{S} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$  kümesinin  $\mathbb{R}^3$  uzayını ürettiğini gösterelim:  $\alpha = (x, y, z)$  ve  $\alpha = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3$  olsun. Her  $x, y, z$  için  $c_1, c_2, c_3$  sabitlerinin bulunabileceğini göstereceğiz. Bunun için

$$c_1 = \frac{-2x + 2y + z}{3}, \quad c_2 = \frac{x - y + z}{3}, \quad c_3 = \frac{4x - y - 2z}{3}$$

bulunur ki  $\text{Span}\{\mathbb{S}\} = \mathbb{R}^3$  olması demektir.

**Örnek 3.2.27**  $\mathbb{P}_2$  uzayında  $\alpha_1 = t^2 + 2t + 1$  ve  $\alpha_2 = t^2 + 2$  ise  $\text{Span}\{\alpha_1, \alpha_2\} = \mathbb{P}_2$  olduğunu gösterelim, yani  $\alpha = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2$  olacak şekilde  $c_1, c_2$  sabitlerini bulmalıyız. Bunun için

$$at^2 + bt + c = c_1(t^2 + 2t + 1) + c_2(t^2 + 2)$$

eşitliğinden

$$c_1 + c_2 = a, \quad 2c_1 = b, \quad c_1 + 2c_2 = c$$

sistemi bulunur. İvneli katsayılar matrisi yazıp indirgenmiş forma getirilirse

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & \vdots & 2a - c \\ 0 & \mathbf{1} & \vdots & c - a \\ 0 & 0 & \vdots & b - 4a + 2c \end{bmatrix}$$

olur. Eğer  $b - 4a + 2c \neq 0$  ise çözüm yoktur. Bu eşitsizliği sağlayan  $a, b, c$  sayıları bulunabileceğinden  $\{\alpha_1, \alpha_2\}$  kümesi  $\mathbb{V}$  yi geremez.

**Tanım 3.2.28**  $\mathbb{V}$  bir vektör uzayı ve  $\mathbb{S} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \subset \mathbb{V}$  olsun. Eğer

$$c_1\alpha_1 + \dots + c_k\alpha_k = 0$$

iken  $c_1 = \dots = c_k = 0$  oluyorsa  $\mathbb{S}$  kümesine **lineer bağımsız**; aksi halde, yani yukarıdaki eşitlik sağlanırken  $c_1, \dots, c_k$  lardan en az biri sıfırdan farklı ise  $\mathbb{S}$  kümesine **lineer bağımlı** adı verilir.

**Örnek 3.2.29**  $\mathbb{R}^4$  uzayında  $\alpha_1 = (1, 0, 1, 2)$ ,  $\alpha_2 = (0, 1, 1, 2)$ ,  $\alpha_3 = (1, 1, 1, 3)$  verilsin.  $\mathbb{S} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$  kümesinin lineer bağımsız olduğunu gösterelim. Buna göre

$$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 = 0$$

olmak üzere

$$c_1 + c_3 = 0, \quad c_2 + c_3 = 0, \quad c_1 + c_2 + c_3 = 0, \quad 2c_1 + 2c_2 + 3c_3 = 0$$

sistemin çözümünden  $c_1 = c_2 = c_3 = 0$  elde edilir ki  $\mathbb{S}$  lineer bağımsız olur.

**Örnek 3.2.30**  $\mathbb{R}^3$  de  $\alpha_1 = (1, 2, -1)$ ,  $\alpha_2 = (1, -2, 1)$ ,  $\alpha_3 = (-3, 2, 1)$  ve  $\alpha_4 = (2, 0, 0)$  verilsin.  $\mathbb{S} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$  kümesi lineer bağımlıdır. Gerçekten,

$$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 + c_4\alpha_4 = 0$$

iken

$$c_1 + c_2 - 3c_3 + 2c_4 = 0$$

$$2c_1 - 2c_2 + 2c_3 = 0$$

$$-c_1 + c_2 - c_3 = 0$$

denkleminin aşıkâr olmayan bir çözümü vardır. Örneğin  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 2$ ,  $c_3 = 1$  ve  $c_4 = 0$  bir çözüm olup  $\mathbb{S}$  nin lineer bağımlı olması için yeterlidir.

**Uyarı 3.2.31**  $\mathbb{R}^n$  de verilen  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  vektörlerin lineer bağımlı olup olmadığı determinant fonksiyonu yardımıyla kolayca incelenebilir. Eğer

$$\det(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$$

ise bunlar lineer bağımlı, aksi durumda ise lineer bağımsızdır.

**Uyarı 3.2.32** Bir reel vektör uzayında  $\mathbb{S} = \{0\}$  kümesi lineer bağımlıdır. Çünkü sıfırdan farklı her  $c$  skaleri için  $c \cdot 0 = 0$  dir.

**Teorem 3.2.33**  $\mathbb{S}_1$  ve  $\mathbb{S}_2$  bir reel vektör uzayının sonlu altkümeleri ve  $\mathbb{S}_1 \subseteq \mathbb{S}_2$  olsun. O zaman aşağıdaki önermeler doğrudur:

1.  $\mathbb{S}_1$  lineer bağımlı ise  $\mathbb{S}_2$  de lineer bağımlıdır.
2.  $\mathbb{S}_2$  lineer bağımsız ise  $\mathbb{S}_1$  de lineer bağımsızdır.

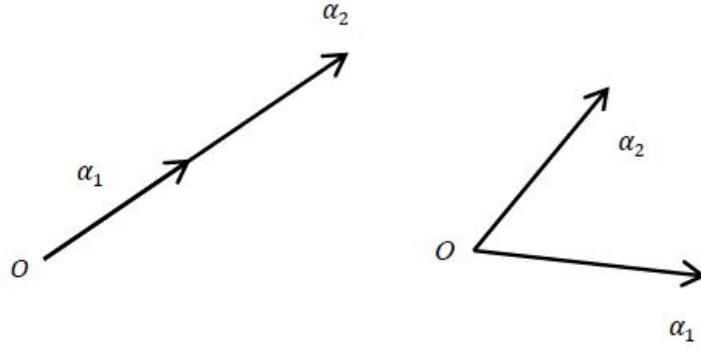
**Uyarı 3.2.34** Yukarıdaki uyarı ve teorem bize 0 (sıfır) ı içeren her kümenin lineer bağımlı olduğunu ifade eder.

**Uyarı 3.2.35**  $\mathbb{R}^2$  de lineer bağımlılık aşağıdaki gibi yorumlanabilir:  $\{\alpha_1, \alpha_2\}$   $\mathbb{R}^2$  de lineer bağımlı ise  $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 = 0$  dır ve  $c_1, c_2$  den en az biri sıfırdan farklıdır. Genelliği bozmadan  $c_1 \neq 0$  kabul edilirse

$$\alpha_1 = -\frac{c_2}{c_1}\alpha_2$$

olur. Bu birinin diğerinin bir katı olması anlamına gelir. Yani

$\{\alpha_1, \alpha_2\}$  lineer bağımlıdır  $\Leftrightarrow$  Biri diğerinin bir katıdır  $\Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow$  Merkezden geçen aynı doğru üzerindedir.



Şekil-6: Lineer bağımlı ve lineer bağımsız vektörler

**Uyarı 3.2.36** Benzer bir sonuç  $\mathbb{R}^3$  için de geçerlidir:  $\mathbb{R}^3$  uzayında

$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$  lineer bağımlıdır  $\Leftrightarrow$  Bu üç vektör merkezden geçen aynı düzlem içindedir.

(Gösteriniz.)

**Teorem 3.2.37**  $\mathbb{V}$  bir vektör uzayı ve  $\mathbb{S} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset \mathbb{V}$  olsun.  $\mathbb{S}$  nin lineer bağımlı olması için bir  $\alpha_j$  vektörünün kendinden önce gelen vektörlerin bir lineer kombinasyonu olması gerek ve yeterdir.

**Sonuç 3.2.38**  $\mathbb{V}$  bir vektör uzayı ve  $\mathbb{S} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset \mathbb{V}$  olsun.  $\mathbb{S}$  nin lineer bağımlı olması için  $\mathbb{S}$  deki bir vektörün diğerlerinin lineer kombinasyonu olması gerek ve yeterdir.

**Sonuç 3.2.39**  $\mathbb{V}$  bir vektör uzayı ve  $\mathbb{S} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset \mathbb{V}$  yi üretsin.  $\alpha_j$  kendinden önce gelen vektörlerin bir lineer kombinasyonu olsun. O zaman

$$\tilde{\mathbb{S}} = \mathbb{S} - \{\alpha_j\} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_n\}$$

kümesi de  $\mathbb{V}$  yi gerer.

**Örnek 3.2.40**  $\mathbb{R}^4$  de  $\alpha_1 = (1, 1, 0, 0)$ ,  $\alpha_2 = (1, 0, 1, 0)$ ,  $\alpha_3 = (0, 1, 1, 0)$  ve  $\alpha_4 = (2, 1, 1, 0)$  vektörleri için  $\mathbb{S} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$  olsun.  $\mathbb{W} = \text{Span}(\mathbb{S})$  diyelim.  $\alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_2$  olduğundan,  $\tilde{\mathbb{S}} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$  denirse  $\mathbb{W} = \text{Span}(\tilde{\mathbb{S}})$  olur ki bu  $\mathbb{W}$  uzayını üretmek için  $\alpha_4$  elemanına ihtiyaç olmadığını ifade eder.

### 3.2.3 Baz ve boyut

**Tanım 3.2.41**  $\mathbb{V}$  bir vektör uzayı ve  $\mathbb{S} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset \mathbb{V}$  olsun. Eğer  $\mathbb{S}$  lineer bağımsız ve  $\text{Span}(\mathbb{S}) = \mathbb{V}$  ise  $\mathbb{S}$  ye  $\mathbb{V}$  nin bir **bazı** denir.

**Örnek 3.2.42**  $\mathbb{R}^3$  uzayında  $\mathbb{S} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$  verilsin.  $\mathbb{S}$  kümesi  $\mathbb{R}^3$  ün bir bazıdır (gösteriniz) ve bu baza  $\mathbb{R}^3$  ün **standart bazı** denir. Daha genel olarak  $\mathbb{R}^n$  uzayının standart bazı

$$\xi_1 = (1, \dots, 0), \dots, \xi_n = (0, \dots, 1)$$

şekindedir.  $\mathbb{R}^3$  nin standart baz elemanları  $\xi_1 = (1, 0, 0)$ ,  $\xi_2 = (0, 1, 0)$ ,  $\xi_3 = (0, 0, 1)$  ile gösterilir ve  $\mathbb{R}^3$  deki her bir  $\alpha = (a, b, c)$  vektörü

$$\alpha = a.\xi_1 + b.\xi_2 + c.\xi_3$$

şeklinde yazılır.

**Örnek 3.2.43**  $\mathbb{S} = \{t^2 + 1, t - 1, 2t + 2\}$  kümesinin  $\mathbb{P}_2$  nin bir bazı olduğunu gösterelim.  $\mathbb{S}$  nin lineer bağımsız ve  $\text{Span}(\mathbb{S}) = \mathbb{P}_2$  olduğunu göstermeliyiz. Bunun için  $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$  olmak üzere

$$c_1(t^2 + 1) + c_2(t - 1) + c_3(2t + 2) = 0$$

$c_1 = 0$ ,  $c_2 + 2c_3 = 0$  ve  $-c_2 + 2c_3 = 0$  olup  $c_1 = c_2 = c_3 = 0$  ve  $\mathbb{S}$  lineer bağımsızdır. Ayrıca  $\text{Span}(\mathbb{S}) = \mathbb{P}_2$  için

$$at^2 + bt + c = c_1(t^2 + 1) + c_2(t - 1) + c_3(2t + 2)$$

olacak şekilde her  $a, b, c$  için  $c_1, c_2, c_3$  skalerlerinin bulunabileceğini göstermeliyiz. Yukarıdaki eşitlikten

$$c_1 = a, \quad c_2 = \frac{a + b - c}{2}, \quad c_3 = \frac{c + b - a}{2}$$

olur ki bu  $\text{Span}(\mathbb{S}) = \mathbb{P}_2$  olduğunu gösterir.

**Örnek 3.2.44**  $\mathbb{R}^4$  de

$$\mathbb{S} = \{\alpha_1 = (1, 0, 1, 0), \alpha_2 = (0, 1, -1, 2), \alpha_3 = (0, 2, 2, 1), \alpha_4 = (1, 0, 0, 1)\}$$

nin bir baz olduğunu bir alıştırma olarak gösteriniz.

**Teorem 3.2.45**  $\mathbb{V}$  reel vektör uzayının bir bazı  $\mathbb{S} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  olsun. O zaman  $\mathbb{V}$  deki her bir eleman  $\mathbb{S}$  deki vektörlerin bir lineer kombinasyonu olacak şekilde tek türlü olarak yazılabilir.

**Tanım 3.2.46** Bir  $\mathbb{V}$  reel vektör uzayının bazındaki eleman sayısına (eğer sonlu ise)  $\mathbb{V}$  nin **boyutu** denir  $\text{boy}(\mathbb{V})$  ile gösterilir. Eğer  $\mathbb{V} = \{0\}$  ise  $\text{boy}(\mathbb{V}) = 0$  olarak kabul edilir.

**Örnek 3.2.47**  $\mathbb{S} = \{t^2, t, 1\}$  kümesi  $\mathbb{P}_2$  için bir baz olup  $\text{boy}(\mathbb{P}_2) = 3$  dir.

**Örnek 3.2.48**  $\mathbb{S} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$  kümesi  $\mathbb{R}^3$  için bir baz olup  $\text{boy}(\mathbb{R}^3) = 3$ .

**Tanım 3.2.49** Bazı sonlu sayıda elemandan oluşan vektör uzaylarına **sonlu-boyutlu vektör uzayı**; aksi durumda ise, **sonsuz-boyutlu vektör uzayı** adı verilir.

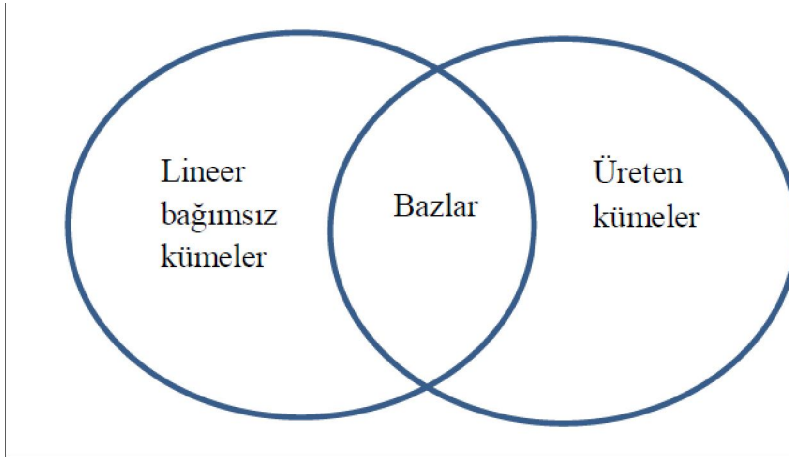
**Uyarı 3.2.50** Aşağıdakiler baz ve boyut kavramları için önemlidir:

1. Eleman sayısı sonlu tek reel vektör uzay  $\{0\}$  dir, çünkü her  $c$  skaleri için  $c \cdot 0 \in \{0\}$  dir.



2.  $\mathbb{V}$  nin herhangi iki bazının eleman sayısı eşittir.
3.  $\mathbb{V}$ ,  $n$ -boyutlu bir uzay ve  $\mathcal{S} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \subset \mathbb{V}$  kümesi lineer bağımsız ise  $k \leq n$  dir.
4.  $\mathbb{V}$ ,  $n$ -boyutlu bir uzay olsun.  $\mathbb{V}$  deki lineer bağımsız ve eleman sayısı en fazla olan küme  $n$  elemanlıdır ve  $\mathbb{V}$  nin bazıdır.
5.  $\text{boy}(\mathbb{V}) = n$  ise  $m > n$  elemanlı bir küme lineer bağımlıdır.
6.  $\text{boy}(\mathbb{V}) = n$  ise  $p < n$  elemanlı bir küme  $\mathbb{V}$  yi üretmez.

Aşağıdaki şekilde lineer bağımsız kümeler, baz ve üreten kümeler arasındaki ilişki verilmektedir.



Şekil-7: Baz, lineer bağımsızlık, üreten kümeler

### 3.2.4 Skaler (İç) çarpım

Aşağıda standart reel vektör uzayında skaler çarpım, norm ve açı gibi kavramlar ifade edilecektir.

**Tanım 3.2.51**  $\mathbb{R}^n$  de  $\alpha = (a_1, \dots, a_n)$  ve  $\beta = (b_1, \dots, b_n)$  vektörleri verilsin. Buna göre

$$\alpha \cdot \beta = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$$

değerine  $\alpha$  ile  $\beta$  nin **skaler çarpımı** (ya da **iç çarpım**) denir.

**Örnek 3.2.52**  $\mathbb{R}^4$  de  $\alpha = (1, 2, -1, 3)$  ve  $\beta = (2, -1, 1, k)$  vektörleri için  $\alpha \cdot \beta = 0$  ise  $k$  değerini bulalım. Çözüm  $k = \frac{1}{3}$  olarak kolayca elde edilebilir.

**Teorem 3.2.53**  $\mathbb{R}^n$  de  $\alpha, \beta, \gamma$  vektörleri ve  $c, d \in \mathbb{R}$  için aşağıdaki özellikler sağlanır:

1.  $(c.\alpha + d.\beta) \cdot \gamma = c.\alpha \cdot \gamma + d.\beta \cdot \gamma$ ,  $\alpha \cdot (c.\beta + d.\gamma) = c.\alpha \cdot \beta + d.\alpha \cdot \gamma$ ;
2.  $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$ ;
3.  $\alpha \cdot \alpha \geq 0$ ;  $\alpha \cdot \alpha = 0 \iff \alpha = 0$ .

**Uyarı 3.2.54** Yukarıdaki 1,2 ve 3 numaralı özelliklere; sırasıyla, **bilineerlik**, **simetri** ve **pozitif tanımlılık** adı verilir.

**Tanım 3.2.55** Üzerinde skaler çarpım tanımlı  $\mathbb{R}^n$  uzayına  **$n$ -boyutlu Öklit uzay** adı verilir.

Öklit Megaren MÖ 330-275. İskenderiyeli matematikçi. Geometrinin babası



Resim-9: Öklit Megaren (MÖ 330-275)

Öklit'in bilimsel kişiliği, unutulmayan sözlerini de yansıtmıştır: Bir gün dersini bitirdiğinde öğrencilerinden biri yaklaşır, “Verdiğiniz ispatlar çok güzel; ama pratikte bunlar neye yarar?” diye sorduğunda, Öklit kapıda bekleyen kölesini çağırır, “Bu delikanlıya 5-10 kuruş ver, vaktinin boşa gitmediğini görsün!” demekle yetinir.

**Tanım 3.2.56**  $\mathbb{R}^n$  uzayında bir  $\alpha = (a_1, \dots, a_n)$  vektörünün **normu**

$$\|\alpha\| = \sqrt{\alpha \cdot \alpha} = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}$$

şeklinde tanımlanır. Eğer  $\|\alpha\| = 1$  ise  $\alpha$  ya **birim vektör** adı verilir.

**Uyarı 3.2.57** Bir  $\alpha \neq 0$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}^n$  vektörü yönündeki tek birim vektör  $\frac{\alpha}{\|\alpha\|}$  dir. Bu aynı zamanda bir vektörü birim vektör yapmak için bir metottür.

**Örnek 3.2.58**  $\mathbb{R}^n$  de  $\alpha = (1, -3, 4, 2)$  vektörünü birim uzunluklu olarak yeniden ifade edelim. Bunun için

$$\tilde{\alpha} = \frac{\alpha}{\|\alpha\|} = \left( \frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{-3}{\sqrt{30}}, \frac{4}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}} \right)$$

olur.

**Teorem 3.2.59** Her  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$  vektörleri için aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır:

1. Cauchy-Schwarz eşitsizliği

$$|\alpha \cdot \beta| \leq \|\alpha\| \|\beta\|;$$

2. Minkowski ya da üçgen eşitsizliği

$$\|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|.$$

Augustin Louis Cauchy (1789-1957). Fransız matematikçi.



Resim-10: Augustin Louis Cauchy (1789-1957)

**Tanım 3.2.60**  $\mathbb{R}^n$  deki her  $\alpha = (a_1, \dots, a_n)$  ve  $\beta = (b_1, \dots, b_n)$  vektörleri için  $\alpha$  ile  $\beta$  arasındaki **uzaklık**

$$d(\alpha, \beta) = \|\alpha - \beta\| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca bu vektörler arasındaki **açı**  $\theta$  ise

$$\cos \theta = \frac{\alpha \cdot \beta}{\|\alpha\| \|\beta\|}$$

bağıntısı mevcuttur.

**Tanım 3.2.61**  $\mathbb{R}^n$  de bir  $\alpha$  vektörünün sıfırdan farklı bir  $\beta$  vektörü üzerine **izdüşümü**

$$izd(\alpha, \beta) = \frac{\alpha \cdot \beta}{\|\beta\|^2} \beta$$

şeklinde tanımlanır.

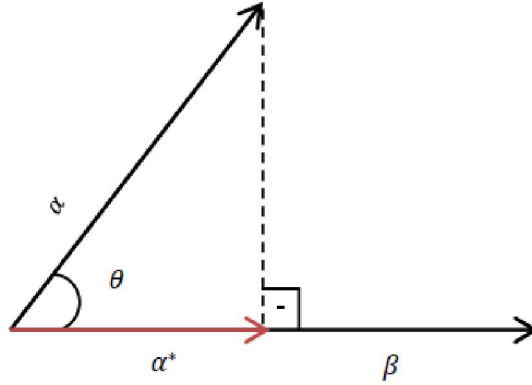
Burada  $\alpha^* = izd(\alpha, \beta)$  denirse,  $\alpha^* = \cos \theta \cdot \alpha$  ve her iki tarafın normu alınıp  $\cos \theta$  yerine değeri yazılırsa

$$\|\alpha^*\| = \|\alpha\| \frac{\alpha \cdot \beta}{\|\alpha\| \|\beta\|} = \frac{\alpha \cdot \beta}{\|\beta\|}$$

olur.  $\alpha^*$  vektörü normu ile aynı yöndeki birim vektörün çarpımı olarak yazılabileceğinden

$$\alpha^* = \frac{\alpha \cdot \beta}{\|\beta\|^2} \beta$$

olur.



Şekil-8: Vektörlerde izdüşüm

**Örnek 3.2.62**  $\mathbb{R}^3$  de  $\alpha = (1, -2, 1)$  ve  $\beta = (2, 3, 1)$  vektörleri arasındaki açıyı ve  $\alpha$ 'nın  $\beta$  üzerindeki izdüşümünü bulalım. Bu açı  $\theta$  ise

$$\cos \theta = \frac{-3}{2\sqrt{27}}, \quad \text{izd}(\alpha, \beta) = \left( \frac{-3}{7}, \frac{-9}{14}, \frac{-3}{14} \right).$$

**Tanım 3.2.63**  $\mathbb{R}^n$  de  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  vektörleri verilsin. Eğer bu vektörlerden herhangi ikisi için

$$\alpha_i \cdot \alpha_j = 0, \quad 1 \leq i, j \leq n$$

ise  $\alpha_i$  ve  $\alpha_j$  vektörlerine **ortogonal (dik)** dir denir. Ayrıca bu vektörler

$$\alpha_i \cdot \alpha_i = 1, \quad 1 \leq i \leq n$$

şartını sağlarsa o zaman  $\alpha_i$  vektörlerine **ortonormal** adı verilir.

Aşağıdaki metot lineer bağımsız vektörlerin bir kümesinden ortonormal bir vektör sistemi elde etmek için kullanılır ve Gram-Schmidt metodu olarak bilinir:

$\mathbb{R}^n$  de lineer bağımsız  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  vektörlerini ele alalım. Buna göre

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \alpha_1, \\ \beta_2 &= \alpha_2 - \frac{\alpha_2 \cdot \beta_1}{\beta_1 \cdot \beta_1} \beta_1 \\ &\dots \\ \beta_n &= \alpha_n - \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_n \cdot \beta_i}{\beta_i \cdot \beta_i} \beta_i\end{aligned}$$

ile verilen  $\beta_1, \dots, \beta_n$  vektörleri ortogonaldır. Ayrıca

$$\gamma_1 = \frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}, \dots, \gamma_n = \frac{\beta_n}{\|\beta_n\|}$$

yazılırsa,  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  ortonormal vektörleri elde edilir. Buna göre

$$\gamma_i \cdot \gamma_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \text{ için,} \\ 0, & i \neq j \text{ için,} \end{cases}$$

burada  $\delta_{ij}$  ile Kronocker deltası gösterilmektedir.

$n = 3$  özel durumunda Gram-Schmidt metodu

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \alpha_1, \quad \beta_2 = \alpha_2 - \frac{\alpha_2 \cdot \beta_1}{\beta_1 \cdot \beta_1} \beta_1 \\ \beta_3 &= \alpha_3 - \frac{\alpha_3 \cdot \beta_2}{\beta_2 \cdot \beta_2} \beta_2 - \frac{\alpha_3 \cdot \beta_1}{\beta_1 \cdot \beta_1} \beta_1, \\ \gamma_1 &= \frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}, \quad \gamma_2 = \frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}, \quad \gamma_3 = \frac{\beta_3}{\|\beta_3\|}\end{aligned}$$

haline dönüştür.

Jorgen Pedersen Gram (1850-1916), Danimarkalı matematikçi.



Resim-11: Jorgen Pedersen Gram (1850-1916)

Erhard Schmidt (1876-1959), Alman matematikçi.



Resim-12: Erhard Schmidt (1876-1959)

**Örnek 3.2.64**  $\mathbb{R}^3$  de  $\alpha_1 = (1, 1, 1)$ ,  $\alpha_2 = (-1, 0, -1)$ ,  $\alpha_3 = (-1, 2, 3)$  vektörleri verilsin.  $\det(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2 \neq 0$  olduğundan vektörler lineer bağımsızdır.

sızdır ve Gram-Schmidt metodu uygulanabilir. Buna göre

$$\beta_1 = \alpha_1 = (1, 1, 1),$$

$$\beta_2 = (-1, 0, -1) - \frac{(-1, 0, -1) \cdot (1, 1, 1)}{(1, 1, 1) \cdot (1, 1, 1)} (1, 1, 1) = \left( \frac{-1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3} \right)$$

ve

$$\beta_3 = (-1, 2, 3) - \frac{(-1, 2, 3) \cdot \left( \frac{-1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3} \right)}{\left( \frac{-1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3} \right) \cdot \left( \frac{-1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3} \right)} \left( \frac{-1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3} \right) -$$

$$\frac{(-1, 2, 3) \cdot (1, 1, 1)}{(1, 1, 1) \cdot (1, 1, 1)} (1, 1, 1) = (-2, 0, 2)$$

vektörleri ortogonal olurlar. Bununla birlikte

$$\gamma_1 = \frac{\beta_1}{\|\beta_1\|} = \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \gamma_2 = \frac{\beta_2}{\|\beta_2\|} = \left( \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}} \right),$$

$$\gamma_3 = \frac{\beta_3}{\|\beta_3\|} = \left( \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

ortonormal vektörler elde edilir.

### 3.2.5 Bölüm sonu alıştırmaları

1.  $\alpha = (2, -6, -1)$ ,  $\beta = (-1, 0, -3)$  ve  $\gamma = (-3, 1, 1)$  vektörleri için aşağıdakileri hesaplayınız:
  - (a)  $3\alpha - 4\beta$ ,
  - (b)  $\alpha - \beta + \gamma$ .
2.  $\alpha = (1, m, -1)$ ,  $\beta = (n, 0, p)$  ve  $\alpha = \beta$  ise  $mnp$  çarpımı kaçtır?
3. Örnek 2.2.2-Örnek 2.2.6 da verilen kümelerin birer reel vektör uzayı olduklarını gösteriniz.
4.  $\mathbb{R}^\infty = \{(x_0, x_1, x_2, \dots) : x_i \in \mathbb{R}, i \in \mathbb{N}\}$  sonsuz diziler kümesinin bir reel vektör uzayı olduğunu gösteriniz.
5.  $\mathbb{V} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$  kümesi üzerinde tanımlı olan aşağıdaki işlemleri ele alalım:

$$\text{Vektör Toplamı : } (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2 + 1, y_1 + y_2 + 1)$$

$$\text{Skalerle çarpım : } c \cdot (x_1, y_1) = (cx_1 + c - 1, cy_1 + c - 1).$$



Bu işlemlerle birlikte  $\mathbb{V}$  kümesinin bir reel vektör uzayı olduğunu gösteriniz. Ayrıca toplama işleminin birim elemanını elde ediniz.

6.  $\mathbb{R}^5$  de aşağıda verilen kümenin bir altuzay olduğunu gösteriniz:

$$\mathbb{V} = \{(0, x, 0, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

7.  $\mathbb{R}^{m \times n}$  üzerinde tüm diagonal matrislerin kümesi bir altuzay oluşturur mu?
8.  $\mathbb{R}^{n \times n}$  üzerinde izleri toplamı sıfır olan tüm matrislerin kümesi bir altuzay oluşturur mu?
9.  $\mathbb{R}^{m \times n}$  üzerinde elemanları pozitif olan tüm matrislerin kümesi bir altuzay oluşturur mu?
10. Aşağıdaki ifadelerden doğru ve yanlış olanları tespit ediniz:
- (a) Eleman sayısı sonlu tek reel vektör uzay  $\{0\}$  dir.
  - (b)  $\mathbb{V}$  bir reel vektör uzayı ve  $\mathbb{W}$  da  $\mathbb{V}$  nin bir reel vektör uzayı olan altkümesi olsun.  $\mathbb{W}$  aynı zamanda  $\mathbb{V}$  nin bir altuzayıdır.
  - (c) Boş küme her reel vektör uzayın bir altuzayıdır.
  - (d)  $\mathbb{V}$  nin herhangi iki altuzayının arakesiti bir altuzayıdır.

11.  $\mathbb{P}_1$ , 1. dereceden polinomların kümesi üzerinde  $\{t + 4, 3t + c^2 + 4\}$  altkümesinin lineer bağımlı olması için  $c$  nin alabileceği değerler çarpımı kaçtır?
12.  $\mathbb{S} = \left\{ f \mid f : \mathbb{R} \xrightarrow{\text{sürekli}} \mathbb{R} \right\}$  reel değerli sürekli fonksiyonların kümesi üzerinde  $f(x) = 3^x$  ve  $g(x) = 3^{2x}$  fonksiyonları için  $\{f, g\}$  altkümesi lineer bağımsız mıdır?

13.  $\mathbb{R}^2$  de

$$\mathbb{S} = \{(1, 0), (0, 4), (0, 0), (2, 0), (2, 2)\}$$

kümesinin tüm lineer bağımsız altkümelerini bulunuz.

14.  $\mathbb{V}$  reel vektör uzayında  $\alpha, \beta, \gamma$  vektörleri için

$$\mathbb{S} = \{c_2 \cdot \gamma - c_3 \cdot \beta, c_1 \cdot \beta - c_2 \cdot \alpha, c_3 \cdot \alpha - c_1 \cdot \gamma\}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

kümesi lineer bağımsız mıdır?

15.  $\mathbb{R}^4$  de  $\{\alpha, \beta, \gamma, \zeta\}$  altkümesi lineer bağımsız olarak verilsin.

$$\{3.\alpha + 2.\beta + \gamma + \zeta, 2.\alpha + 5.\beta, 3.\gamma + 2.\zeta, 3.\alpha + 4.\beta + 2.\gamma + 3.\zeta\}$$

kümesi de lineer bağımsız mıdır?

16.  $\mathbb{R}^3$  de  $\alpha = (1, 0, 1)$  vektörünü içeren bir baz bulunuz.

17.  $\mathbb{V}$ , 3–boyutlu bir reel vektör uzayı ve bazı  $\{\alpha, \beta, \gamma\}$  olsun.

$$\{\alpha + \beta, \beta + \gamma, \alpha - \gamma\}$$

kümesi de  $\mathbb{V}$  için bir baz olur mu?

18.  $\mathbb{V} = \{(0, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$  altuzayının bir bazını bulunuz.

19. Aşağıdakilerden hangisi  $\mathbb{R}^3$  için bir bazdır:

- (a)  $\{(1, 0, -1), (2, 5, 1), (0, -4, 3)\}$ ;
- (b)  $\{(2, -4, 1), (0, 3, -1), (6, 0, -1)\}$ ;
- (c)  $\{(1, 2, -1), (1, 0, 2), (2, 1, 1)\}$ ;
- (d)  $\{(1, -3, -2), (-3, 1, 3), (-2, -10, -2)\}$ .

20. Aşağıdaki ifadelerden doğru ve yanlış olanları tespit ediniz:

- (a)  $\{0\}$  uzayı bir baza sahip değildir.
- (b) Sonlu bir küme ile oluşturulan her vektör uzayı bir baza sahiptir.
- (c) Her vektör uzayı sonlu bir baza sahiptir.
- (d) Bir vektör uzayı birden fazla baza sahip olamaz.
- (e) Eğer bir vektör uzayı sonlu bir baza sahipse, her bazındaki eleman sayısı aynıdır.
- (f)  $\mathbb{P}_n$ ,  $n$ . dereceden polinomların kümesinin boyutu  $n$  dir.
- (g)  $\mathbb{R}^{m \times n}$  kümesinin boyutu  $m + n$  dir.
- (h) Eğer  $\mathbb{V}$ ,  $n$ –boyutlu bir vektör uzayı ise, boyutu 0 olan yalnız bir ve boyutu  $n$  olan yalnız bir altuzayı vardır.

21.  $\mathbb{R}^2$  nin bir bazı  $\{\alpha, \beta\}$  olsun.  $c, d \in \mathbb{R}$  için  $\{\alpha + \beta, c.\alpha\}$  ve  $\{c.\alpha, d.\beta\}$  kümelerinin de  $\mathbb{R}^2$  için bir baz olduğunu gösteriniz.

22. Aşağıdaki homojen lineer denklem sistemini ele alalım:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Bu sistemin çözümler kümesi  $\mathbb{R}^3$  için bir altuzaydır. Bu altuzay için bir baz elde ediniz.

23.  $\mathbb{R}^n$  de  $\alpha$  ve  $\beta$  vektörleri için aşağıda verilen eşitliklerin sağlandığını gösteriniz:

(a) Eğer  $\alpha$  ve  $\beta$  ortogonal ise

$$\|\alpha + \beta\|^2 = \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2.$$

Bu eşitliğin  $n = 2$  durumunda Klasik Geometrideki hangi ünlü teoreme karşılık geldiğini bulunuz.

(b) Aşağıdaki eşitliğe *paralelkenar kuralı* (yasası) denir.

$$\|\alpha + \beta\|^2 + \|\alpha - \beta\|^2 = 2\|\alpha\|^2 + 2\|\beta\|^2.$$

Bu kuralın  $\mathbb{R}^2$  de paralelkenarlarla ilişkisini ifade ediniz.

(c) Aşağıdaki eşitliğe *polar eşitliği* denir.

$$\alpha \cdot \beta = \frac{1}{4} \|\alpha + \beta\|^2 - \frac{1}{4} \|\alpha - \beta\|^2.$$

Bu eşitliği gerçekleyiniz.

24. Bir reel vektör uzayında; eğer herhangi iki vektör Cauchy-Schwarz eşitsizliğinin eşitlik durumunu sağlarsa, bu vektörlerle ilgili ne söyleyebilirsiniz?

25. Bir reel vektör uzayında; eğer herhangi iki vektör Minkowski eşitsizliğinin eşitlik durumunu sağlarsa, bu vektörlerle ilgili ne söyleyebilirsiniz?

26.  $\mathbb{R}^2$  de  $\left\{ \left( \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right), \left( \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}} \right) \right\}$  kümesinin bir ortonormal baz olduğunu gösteriniz.

27.  $\mathbb{R}^3$  de  $\{(1, 0, -1), (2, -1, 1), (-1, -1, 4)\}$  kümesine Gram-Schmidt metodu uygulanabilir mi?
28.  $\mathbb{R}^3$  de  $\{(1, 1, 0), (2, 0, 1), (2, 2, 1)\}$  vektörlerinin lineer bağımlı-bağımsız olduklarını kontrol ettikten sonra (eğer lineer bağımsız ise) Gram-Schmidt metodunu uygulayınız.
29.  $\mathbb{R}^n$  de ortogonal vektörlerin birbirine göre izdüşümleri hakkında ne söyleyebilirsiniz. Geometrik olarak yorumlayınız.

### 3.3 Kompleks vektör uzayları

Kompleks sayılar kümesinin kendisi ile  $n$  kez kartezyen çarpımından meydana gelen

$$\mathbb{C}^n = \mathbb{C} \times \dots \times \mathbb{C} = \{(z_1, \dots, z_n) : z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}\}$$

kümesi üzerinde

$$(z_1, \dots, z_n) + (w_1, \dots, w_n) = (z_1 + w_1, \dots, z_n + w_n)$$

ve

$$z(z_1, \dots, z_n) = (zz_1, \dots, zz_n), \quad z \in \mathbb{C},$$

işlemleri tanımlanırsa  $\mathbb{C}^n$  bir vektör uzayı olup  $n$ -boyutlu kompleks vektör uzayı adını alır.

**Örnek 3.3.1**  $\mathbb{C}^3$  de  $\alpha = (2 + 3i, 4 - i, 3)$  ve  $\beta = (3 - 2i, 5i, 4 - 6i)$  vektörleri için

$$\alpha + \beta = (5 + i, 4 + 4i, 7 - 6i)$$

ve

$$(5 - 2i)\alpha = (16 + 11i, 18 - 13i, 15 - 6i)$$

olur.

**Tanım 3.3.2**  $\mathbb{C}^n$  de  $\alpha = (z_1, \dots, z_n)$  ve  $\beta = (w_1, \dots, w_n)$  vektörleri için,  $\alpha$  ile  $\beta$  nin iç çarpımı

$$\alpha \cdot \beta = z_1 \bar{w}_1 + \dots + z_n \bar{w}_n$$

ile tanımlanır.  $\alpha$  nin normu

$$\|\alpha\| = \sqrt{\alpha \cdot \alpha} = \sqrt{z_1 \bar{z}_1 + \dots + z_n \bar{z}_n} = \sqrt{|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2}$$

dir.

**Uyarı 3.3.3**  $\|\alpha\|$  değeri daima reel ve pozitiftir.

**Örnek 3.3.4**  $\mathbb{C}^3$  de  $\alpha = (2 + 3i, 4 - i, 3 + 5i)$  ve  $\beta = (3 - 4i, 5i, 4 - 2i)$  vektörleri için

$$\alpha \cdot \beta = (2 + 3i)(\overline{3 - 4i}) + (4 - i)(\overline{5i}) + (3 + 5i)(\overline{4 - 2i}) = -9 + 19i$$

ve

$$\alpha \cdot \alpha = |2 + 3i|^2 + |4 - i|^2 + |3 + 5i|^2 = 64$$

dolayısıyla  $\|\alpha\| = 8$  olur.

**Tanım 3.3.5** Üzerinde tanımlı iç çarpım tanımlı  $\mathbb{C}^n$  uzayına  $n$ -boyutlu kompleks Öklit uzayı adı verilir.

**Teorem 3.3.6**  $\mathbb{C}^n$  de  $\alpha, \beta, \gamma$  vektörleri ve  $z, w \in \mathbb{C}$  için aşağıdaki özellikler sağlanır:

1.  $(z \cdot \alpha + w \cdot \beta) \cdot \gamma = z \cdot \alpha \cdot \gamma + w \cdot \beta \cdot \gamma$ ,  $\alpha \cdot (z \cdot \beta + w \cdot \gamma) = z \cdot \alpha \cdot \beta + w \cdot \alpha \cdot \gamma$ ;
2.  $\alpha \cdot \beta = \overline{\alpha \cdot \beta}$ ;
3.  $\alpha \cdot \alpha \geq 0$ ;  $\alpha \cdot \alpha = 0 \iff \alpha = 0$ .

**Uyarı 3.3.7**  $\mathbb{C}^n$  uzayında da Cauchy-Schwarz ve Minkowski (ya da üçgen) eşitsizlikleri sağlanmaktadır.

### 3.3.1 Bölüm sonu alıştırmaları

1. Aşağıdaki işlemleri yapınız:

- (a)  $i^0, i^3, i^5, i^{10}$ ;
- (b)  $i^{39}, i^{174}, i^{256}, i^{327}$ ;
- (c)  $(4 - 3i)^2, (1 + 3i)^2, (1 - i)^3$ ;
- (d)  $\frac{2-7i}{5+3i}$ .

2.  $6 + 4i, 2 + i, 1 - 2i, 5, -3i, i$  sayılarının eşleniklerini bulunuz.

3. Aşağıda verilen vektörler için  $\|\alpha\|$ ,  $\|\beta\|$  ve  $\alpha \cdot \beta$  değerini bulunuz:

$$(a) \alpha = (1 + 2\mathbf{i}, 3 - \mathbf{i}, -1 - 4\mathbf{i}), \beta = (1 - 2\mathbf{i}, 1 + \mathbf{i}, 1 + \mathbf{i})$$

$$(b) \alpha = (2\mathbf{i}, \mathbf{i}, -6\mathbf{i}), \beta = (3 - 2\mathbf{i}, 4 - \mathbf{i}, 5\mathbf{i})$$

$$(c) \alpha = (1, 0, -1), \beta = (1 - 2\mathbf{i}, 1 + \mathbf{i}, 1 + \mathbf{i}).$$

4.  $\mathbb{C}^n$  de her  $\alpha, \beta$  vektörleri için aşağıdaki eşitliği gerçekteyiniz:

$$\|\alpha \pm \beta\|^2 = \|\alpha\|^2 \pm 2 \operatorname{Re} \alpha \cdot \beta + \|\beta\|^2,$$

burada  $\operatorname{Re} \alpha \cdot \beta$  ile  $\alpha \cdot \beta$  kompleks sayısının reel kısmı ifade edilmektedir.

5.  $\mathbb{C}^n$  de her  $\alpha, \beta$  vektörleri için aşağıdaki eşitliği gerçekteyiniz:

$$|\|\alpha\| - \|\beta\|| \leq \|\alpha - \beta\|$$

6.  $\mathbb{C}^n$  de her  $\alpha, \beta$  vektörleri için aşağıdaki eşitliği gerçekteyiniz:

$$\alpha \cdot \beta = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 \mathbf{i}^k \|\alpha + \mathbf{i}^k \beta\|^2.$$

7.  $\mathbb{C}^\infty = \{(z_0, z_1, z_2, \dots) : z_i \in \mathbb{C}, i \in \mathbb{N}\}$  sonsuz diziler kümesinin bir vektör uzayı olduğunu gösteriniz.

## 3.4 Lineer dönüşümler ve matrisler

Lineer Cebir dersinin asıl konusu matrisler yardımıyla lineer dönüşümleri incelemektir.

### 3.4.1 Lineer dönüşümler

**Tanım 3.4.1**  $\mathbb{V}$  ve  $\mathbb{W}$  iki reel (ya da kompleks) vektör uzayı ve  $L : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$  bir fonksiyon olsun. Eğer

$$1. \text{ her } \alpha, \beta \in \mathbb{V} \text{ için } L(\alpha + \beta) = L(\alpha) + L(\beta);$$

$$2. \text{ her } c \in \mathbb{R} \text{ (ya da } z \in \mathbb{C}) \text{ ve her } \alpha \in \mathbb{V} \text{ için } L(c \cdot \alpha) = c \cdot L(\alpha) \text{ ise } L \text{ ye } \mathbb{V} \text{ den } \mathbb{W} \text{ ya bir } \mathbf{lineer dönüşüm} \text{ denir.}$$

**Uyarı 3.4.2** *Dönüşüm kavramı daha genel hallerde fonksiyonun yerine kullanılır. Daha açık bir ifadeyle, görüntü kümesi reel yada kompleks sayılar olan her dönüşüm bir fonksiyon olarak ifade edilir.*

**Uyarı 3.4.3**  $L : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$  bir lineer dönüşüm ise  $L(0) = 0$  dır. Gerçekten her  $\alpha \in \mathbb{V}$  için

$$L(\alpha - \alpha) \stackrel{1}{=} L(\alpha) + L(-\alpha) \stackrel{2}{=} L(\alpha) - L(\alpha) = 0$$

olur. Ancak bu durumun tersi her zaman doğru olmayabilir.

**Lemma 3.4.4**  $L : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$  fonksiyonunun bir lineer dönüşüm olması için her  $c \in \mathbb{R}$  ve  $\alpha, \beta \in \mathbb{V}$  olmak üzere

$$L(\alpha + c.\beta) = L(\alpha) + c.L(\beta)$$

olması gerek ve yeterdir.

**Örnek 3.4.5** Bir reel (ya da kompleks)  $\mathbb{V}$  vektör uzayında  $L : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$  dönüşümü

$$L(\alpha) = c.\alpha, c \in \mathbb{R}$$

(ya da  $c \in \mathbb{C}$ ) olarak tanımlanıyor.  $L$  nin lineer olduğunu gösterelim: Her  $\alpha, \beta \in \mathbb{V}$  ve her  $d \in \mathbb{R}$  (ya da  $c \in \mathbb{C}$ ) için

$$\begin{aligned} L(\alpha + d.\beta) &= c.(\alpha + d.\beta) = (c.\alpha) + d.(c.\beta) \\ &= L(\alpha) + d.L(\beta) \end{aligned}$$

olur ki  $L$  lineer bir dönüşüm olur.

**Örnek 3.4.6**  $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ,

$$L(x, y, z) = (x, y)$$

şeklinde tanımlanan  $L$  izdüşüm dönüşümünün lineer olduğunu gösterelim: Her  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^3$  için

$$\alpha = (a_1, a_2, a_3), \beta = (b_1, b_2, b_3)$$

olsun. O zaman, her  $c \in \mathbb{R}$  için

$$\begin{aligned} L(\alpha + c.\beta) &= L((a_1, a_2, a_3) + c.(b_1, b_2, b_3)) \\ &= L(a_1 + cb_1, a_2 + cb_2, a_3 + cb_3) \\ &= (a_1 + cb_1, a_2 + cb_2) \\ &= (a_1, a_2) + c.(b_1, b_2) \\ &= L(\alpha) + c.L(\beta) \end{aligned}$$

olup  $L$  dönüşümü lineerdir.

**Örnek 3.4.7**  $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $L(x, y) = (x - y, x + y)$  olarak tanımlanan  $L$  nin lineer bir dönüşüm olduğunu gösterelim: Her  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha = (a_1, a_2)$ ,  $\beta = (b_1, b_2)$  ve her  $c \in \mathbb{R}$  için

$$\begin{aligned} L(\alpha + c.\beta) &= L((a_1, a_2) + c.(b_1, b_2)) = L((a_1 + cb_1, a_2 + cb_2)) \\ &= (a_1 + cb_1 - a_2 + cb_2, a_1 + cb_1 + a_2 + cb_2) \\ &= (a_1 - a_2, a_1 + a_2) + c.(b_1 - b_2, b_1 + b_2) \\ &= L(\alpha) + c.L(\beta) \end{aligned}$$

olur ki  $L$  lineerdir.

**Örnek 3.4.8**  $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$L(x, y, z) = (x + 1, 2y, z)$$

şeklinde verilen dönüşümün lineer olup olmadığını inceleyelim: Eğer  $L$  bir lineer dönüşüm ise  $L(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$  olur. Halbuki  $L(0, 0, 0) = (1, 0, 0)$  olduğundan  $L$  lineer değildir.

**Uyarı 3.4.9**  $\mathbb{V}$  ve  $\mathbb{W}$  iki reel (ya da kompleks) vektör uzayı olsun. Literatürde bunlar arasında tanımlı bir lineer dönüşüme **homomorfizm** de denilmektedir.  $\mathbb{V}$  ve  $\mathbb{W}$  arasındaki bütün homomorfizmlerin kümesi  $\text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$  ile gösterilir. Üstelik,  $\text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$  kümesi de bir reel (ya da kompleks) vektör uzayıdır.

**Tanım 3.4.10**  $L : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$  bir lineer dönüşüm,  $\mathbb{H}$  kümesi  $\mathbb{V}$  vektör uzayının bir altkümesi olsun. Bu durumda

$$L(\mathbb{H}) = \{L(\alpha) : \alpha \in \mathbb{H}\}$$

kümesine  $\mathbb{H}$  nin  $L$  altındaki görüntü kümesi ya da kısaca görüntüsü adı verilir.



**Teorem 3.4.11**  $L : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$  bir lineer dönüşüm ve  $\mathbb{H}$  kümesi  $\mathbb{V}$  vektör uzayının bir altuzayı olsun. O zaman  $L(\mathbb{H})$  görüntü kümesi de  $\mathbb{W}$  nın bir altuzayı olur.

**Örnek 3.4.12**  $\mathbb{R}^3$  uzayında  $x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$  düzlemi  $\mathbb{R}^3$  ün bir altuzayıdır. Bu düzlemde bulunan tüm vektörlerin kümesini  $\mathbb{H}$  ile gösterelim. Buna göre  $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ ,

$$L(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + x_2, x_1 + x_2 - 2x_3, x_2 - x_3, x_1 + 4x_2 - x_3)$$

ile verilen  $L$  lineer dönüşümü için  $L(\mathbb{H}) \subset \mathbb{R}^4$  altuzayının boyutu ile birlikte bir bazını elde edelim: Buna göre  $\mathbb{H}$  kümesinde bulunan tüm vektörlerin bileşenleri  $x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$  denklemini sağlarlar ve dolayısıyla

$$\mathbb{H} = \{(a - 2b, a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$$

dir, yani bir  $\alpha \in \mathbb{H}$  ise  $\alpha = (a - 2b, a, b)$  dir. Buna göre

$$\begin{aligned} L(a - 2b, a, b) &= (3(a - 2b) + a, a - 2b + a - 2b, a - b, a - 2b + 4a - b) \\ &= (4a - 6b, 2a - 4b, a - b, 5a - 3b) \end{aligned}$$

olur, yani

$$L(\mathbb{H}) = \{(4a - 6b, 2a - 4b, a - b, 5a - 3b) : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Dolayısıyla  $\beta \in L(\mathbb{H})$  ise

$$\begin{aligned} \beta &= (4a - 6b, 2a - 4b, a - b, 5a - 3b) \\ &= a \cdot (4, 2, 1, 5) + b \cdot (-6, -4, -1, -3) \end{aligned}$$

olduğu için  $\text{Span}\{(4, 2, 1, 5), (-6, -4, -1, -3)\} = L(\mathbb{H})$  denilebilir. Ayrıca bu küme lineer bağımsız olduğundan  $L(\mathbb{H})$  nın bir bazıdır. Bu bazın eleman sayısı 2 olduğundan  $L(\mathbb{H})$  nın boyutu da 2 dir.

**Örnek 3.4.13**  $L : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  lineer dönüşümü

$$L(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 + 2x_3 - 2x_4, -x_1 + x_2 + 3x_4, 2x_2 + 2x_3 + 4x_4)$$

şeklinde tanımlansın.  $L(\mathbb{R}^4)$  altuzayını elde edip boyutunu bulalım: Eğer

$$2x_1 + 2x_3 - 2x_4 = a,$$

$$-x_1 + x_2 + 3x_4 = b,$$

$$2x_2 + 2x_3 + 4x_4 = c$$

denirse, bu sistemin çözümü bize  $L(\mathbb{R}^4)$  altuzayını karakterize edecektir. Bu denklem sisteminin çözümü

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & -2 & : & a \\ -1 & 1 & 0 & 3 & : & b \\ 0 & 2 & 2 & 4 & : & c \end{bmatrix} \xrightarrow{\varepsilon_1: \alpha_1 \rightarrow \alpha_1 + \alpha_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & : & a+b \\ -1 & 1 & 0 & 3 & : & b \\ 0 & 2 & 2 & 4 & : & c \end{bmatrix} \\
& = \begin{matrix} \varepsilon_2: \alpha_2 \rightarrow \alpha_2 + \alpha_1 \\ \approx \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & : & a+b \\ 0 & 2 & 2 & 4 & : & a+2b \\ 0 & 2 & 2 & 4 & : & c \end{bmatrix} \begin{matrix} \varepsilon_3: \alpha_3 \rightarrow \alpha_3 - \alpha_2 \\ \approx \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & : & a+b \\ 0 & 2 & 2 & 4 & : & a+2b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & -a-2b+c \end{bmatrix} \\
& = \begin{matrix} \varepsilon_4: \alpha_2 \rightarrow \frac{1}{2}\alpha_2 \\ \approx \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & : & a+b \\ 0 & 1 & 1 & 2 & : & \frac{a}{2}+b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & -a-2b+c \end{bmatrix} \begin{matrix} \varepsilon_5: \alpha_1 \rightarrow \alpha_1 - \alpha_2 \\ \approx \\ \varepsilon_6: \alpha_3 \rightarrow -1.\alpha_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & : & \frac{a}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 2 & : & \frac{a}{2}+b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & a+2b-c \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

olup, indirgenmiş matrisin gösterdiği lineer denklem sisteminin tutarlı olması için

$$a + 2b - c = 0$$

olur. Buna göre  $L(\mathbb{R}^4)$  kümesi  $b = x$ ,  $c = y$  için  $a = -2x + y$  olup

$$L(\mathbb{R}^4) = \{(-2x + y, x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca

$$(-2x + y, x, y) = x(-2, 1, 0) + y(1, 0, 1)$$

olduğundan  $\text{Span}\{(-2, 1, 0), (1, 0, 1)\} = L(\mathbb{R}^4)$  denilebilir ki bu da  $L(\mathbb{R}^4)$  ün boyutunun 2 olması demektir.

**Tanım 3.4.14**  $L : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$  bir lineer dönüşüm ve  $L(\mathbb{V})$  sonlu boyutlu ise bu uzayın boyutuna  $L$  lineer dönüşümünün rankı denir.

**Örnek 3.4.15** Yukarıdaki örneklerde verilen dönüşümlerin rankı 2 dir.

### 3.4.2 Bir lineer dönüşümün matrisi

Bu bölümde matrisler ve lineer dönüşümler arasında bir eşleme kurulacaktır.

$\mathbb{V}$ ,  $n$ -boyutlu;  $\mathbb{W}$ ,  $m$ -boyutlu reel (ya da kompleks) vektör uzayları ve  $L : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$  lineer dönüşüm olsun.  $\mathbb{S}_{\mathbb{V}} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  ve  $\mathbb{S}_{\mathbb{W}} = \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$  de sırasıyla  $\mathbb{V}$  nin ve  $\mathbb{W}$  nin bazları olsun.  $1 \leq j \leq n$  için  $L(\alpha_j)$  vektörleri  $\mathbb{W}$  uzayının vektörleridir ve bu vektörler  $\mathbb{S}_{\mathbb{W}}$  bazına göre

$$L(\alpha_j) = a_{1j}\beta_1 + a_{2j}\beta_2 + \dots + a_{mj}\beta_m = \sum_{i=1}^m a_{ij}\beta_i$$

yazılabilir. Burada  $a_{ij}$  ler  $\alpha_j$  ve  $\beta_i$  ye bağlı sayılardır. Bu eşitlik daha açık bir şekilde

$$\begin{aligned} L(\alpha_1) &= a_{11}\beta_1 + a_{21}\beta_2 + \dots + a_{m1}\beta_m \\ L(\alpha_2) &= a_{12}\beta_1 + a_{22}\beta_2 + \dots + a_{m2}\beta_m \\ &\vdots \\ L(\alpha_n) &= a_{1n}\beta_1 + a_{2n}\beta_2 + \dots + a_{mn}\beta_m \end{aligned}$$

yazılabilir. Görüldüğü üzere  $a_{ij}$  sayıları bir  $m \times n$  tipinde bir  $[a_{ij}]_{m \times n}$  matrisi belirtir.

**Tanım 3.4.16**  $\mathbb{V}$  ve  $\mathbb{W}$  sonlu boyutlu reel (ya da kompleks) vektör uzayları olmak üzere

$$L(\alpha_i) = \sum_{j=1}^m a_{ij}\beta_j$$

eşitliğinin belirttiği  $[a_{ij}]_{m \times n}$  matrisine  $L$  lineer dönüşümünün  $\mathbb{S}_{\mathbb{V}}$  ve  $\mathbb{S}_{\mathbb{W}}$  bazlarına göre **matrisi** denir.

**Örnek 3.4.17**  $\mathbb{P}_2$ , 2. dereceden polinomların;  $\mathbb{P}_1$ , 1. dereceden polinomların uzayı olsun.  $L : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_1$  dönüşümü  $L(P(t)) = P'(t)$  olsun.  $\mathbb{S}_1 = \{t^2, t, 1\}$  ve  $\mathbb{S}_2 = \{t, 1\}$  de  $\mathbb{P}_2$  ve  $\mathbb{P}_1$  in bazları olsun.  $L$  lineer dönüşümüne karşılık gelen  $[a_{ij}]$  matrisini bulalım:  $\mathbb{S}_1$  in elemanlarının  $L$  altındaki görüntülerini bulmalıyız. Daha sonra bu görüntüleri  $\mathbb{P}_1$  in bazı olan  $\mathbb{S}_2$  nin elemanlarının bir lineer birleşimi olarak yazalım.

$$L(t^2) = 2t = a_{11}.t + a_{12}.1$$

ve  $a_{11} = 2$ ,  $a_{12} = 0$  olduğundan  $[L(t^2)]_{\mathbb{S}_2} = (2, 0)^T$ . Benzer şekilde  $L(t) = (0, 1)^T$  ve  $L(1) = (0, 0)^T$  elde edilir. Böylece istenen matris

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dir.

**Örnek 3.4.18**  $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $L(x, y, z) = (x + y + z, x + 2y + 3z)$  lineer dönüşümü verilsin.  $\mathbb{R}^3$  ve  $\mathbb{R}^2$  nin standart bazlarını göz önüne alarak  $L$  ye karşılık gelen matrisi bulalım: Buna göre elde edilecek matris  $2 \times 3$  tipinde olup

$$\begin{aligned} L(1, 0, 0) &= (1, 1) = 1 \cdot (1, 0) + 1 \cdot (0, 1), \\ L(0, 1, 0) &= (1, 2) = 1 \cdot (1, 0) + 2 \cdot (0, 1), \\ L(0, 0, 1) &= (1, 3) = 1 \cdot (1, 0) + 3 \cdot (0, 1), \end{aligned}$$

eşitlikleri yardımıyla istenilen matris

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir.

**Örnek 3.4.19**  $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $L(x, y) = (2y, 3x, x - 2y)$

$$\mathbb{S}_{\mathbb{R}^2} = \{(2, -1), (1, 1)\} \text{ ve } \mathbb{S}_{\mathbb{R}^3} = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (-1, 2, 1)\}$$

bazlarına göre  $L$  ye karşılık gelen matrisi bulalım: Buna göre bulmamız gereken  $[a_{ij}]_{3 \times 2}$  şeklinde bir matris olacaktır. Dolayısıyla

$$L(2, -1) = (-2, 6, 4) = a_{11}(1, 1, 0) + a_{21}(1, 0, 1) + a_{31}(-1, 2, 1),$$

denkleminde

$$\begin{cases} a_{11} + a_{21} - a_{31} = -2, \\ a_{11} + 2a_{31} = 6, \\ a_{21} + a_{31} = 4, \end{cases}$$

sistemi ve benzer şekilde

$$L(1, 1) = (2, 3, -1) = a_{12}(1, 1, 0) + a_{22}(1, 0, 1) + a_{32}(-1, 2, 1),$$

denkleminde

$$\begin{cases} a_{12} + a_{22} - a_{32} = 2, \\ a_{12} + 2a_{32} = 3, \\ a_{22} + a_{32} = -1, \end{cases}$$

elde edilip bu sistemler çözümlerse  $[a_{ij}]_{3 \times 2}$  matrisi

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

bulunur.

### 3.4.3 Öz değerler ve öz vektörler

**Tanım 3.4.20**  $A \in \mathbb{R}_n^n$ ,  $n \times n$  tipinde bir matris olsun.

$$A\alpha = t.\alpha$$

olacak şekilde sıfırdan farklı en az bir  $\alpha \in \mathbb{R}^n$  vektörü varsa  $t \in \mathbb{R}$  sayısına  $A$  matrisinin bir **öz (karakteristik ya da aygen) değeri** denir.  $t$  sayısı  $A$  matrisinin bir öz değeri olmak üzere

$$A\alpha = t.\alpha$$

eşitliğini sağlayan  $\alpha$  vektörüne ise  $A$  matrisinin  $t$  öz değerine karşılık gelen bir **öz (karakteristik ya da aygen) vektörü** denir.

**Uyarı 3.4.21** Aşağıda bir matrisin öz değerleri ve öz vektörlerini bulmak için bir metot ifade edilmiştir:

$$A\alpha = t.\alpha$$

eşitliği aynı zamanda

$$(A - t.I_n)\alpha = 0 \quad (3.1)$$

şeklinde de yazılabileceğinden (3.1) denkleminin aşikar olmayan bir çözümü olabilmesi için

$$\det(A - t.I_n) = 0 \quad (3.2)$$

olması gerek ve yeterdir. Dolayısıyla  $A$  matrisinin öz değerleri (3.2) denklemini sağlayan  $t$  sayıdır. Her bir  $t$  öz değeri için (3.1) denkleminin aşikar olmayan çözümleri bulunur. Bunlar  $A$ 'nın  $t$  ye karşılık gelen öz vektörleridir.

### Örnek 3.4.22

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 7 \end{bmatrix}$$

olmak üzere  $A$  matrisinin öz değerlerini bulalım. Bunun için

$$\det(A - t.I_2) = 0$$

denklemini inceleyelim, yani

$$A - t.I_2 = \begin{bmatrix} 5-t & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 7-t \end{bmatrix}$$

ve dolayısıyla

$$\begin{vmatrix} 5-t & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 7-t \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow t^2 - 12t + 32 = (t-4)(t-8) = 0$$

olduğundan  $A$  matrisinin  $t_1 = 4$  ve  $t_2 = 8$  olacak şekilde iki tane öz değeri vardır.

### Örnek 3.4.23

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

olmak üzere  $A$  matrisinin öz değerlerini ve öz vektörlerini bulalım. Bunun için

$$\det(A - t.I_2) = 0$$

denklemini inceleyelim, yani

$$A - t.I_2 = \begin{bmatrix} -4 - t & -6 \\ 3 & 5 - t \end{bmatrix}$$

ve dolayısıyla

$$\begin{vmatrix} -4 - t & -6 \\ 3 & 5 - t \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow t^2 - t - 2 = (t + 1)(t - 2) = 0$$

olduğundan  $A$  matrisinin  $t_1 = -1$  ve  $t_2 = 2$  olacak şekilde iki tane öz değeri vardır.  $A$  matrisinin her bir öz değerine karşılık gelen öz vektörler

$$A\alpha = t_i\alpha, \quad i = 1, 2,$$

ya da

$$(A - t_i I_2)\alpha = 0$$

denklemini ile bulunur. Buna göre

- $t_1 = -1$  için,  $\alpha = (x, y)$  olmak üzere

$$\left( \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} - (-1) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

veya

$$\begin{bmatrix} -3 & -6 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

homojen lineer denklem sistemi bulunur. Bu sistemin ilaveli katsayılar matrisi ve ona denk olan matris

$$\begin{bmatrix} -3 & -6 & : & 0 \\ 3 & 6 & : & 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 2 & : & 0 \\ 0 & 0 & : & 0 \end{bmatrix}$$

bulunur. Buna göre  $y = s$  denirse  $x = -2s$  olur. Buna göre

$$\alpha = \begin{bmatrix} -2s \\ s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$O$  halde  $c_1$  öz değerine karşılık gelen öz vektörlerin kümesi

$$\left\{ s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\} = Sp \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

olur.

- $t_2 = 2$  için,  $\beta = (z, w)$  olmak üzere

$$\left( \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

veya

$$\begin{bmatrix} -6 & -6 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

homojen lineer denklem sistemi bulunur. Bu sistemin ilaveli katsayılar matrisi ve ona denk olan matris

$$\begin{bmatrix} -6 & -6 & \vdots & 0 \\ 3 & 3 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

bulunur. Buna göre  $w = s$  denirse  $z = -s$  olur. Buna göre

$$\beta = \begin{bmatrix} -s \\ s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$O$  halde  $t_2$  öz değerine karşılık gelen öz vektörlerin kümesi

$$\left\{ s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\} = Sp \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

olur.

#### Örnek 3.4.24

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 7 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$



matrisinin öz değerlerini bulalım. Bunun için

$$\det(A - t.I_3) = 0$$

denklemini inceleyelim, yani

$$A - t.I_3 = \begin{bmatrix} 4-t & 1 & 0 \\ 1 & 1-t & 1 \\ 7 & 2 & 2-t \end{bmatrix}$$

ve dolayısıyla

$$\begin{vmatrix} 4-t & 1 & 0 \\ 1 & 1-t & 1 \\ 7 & 2 & 2-t \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow t^3 - 7t^2 + 11t - 5 = 0$$

olduğundan  $t_1 = 1$ ,  $t_2 = 1$  ve  $t_3 = 5$  elde edilir.

#### Örnek 3.4.25

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

olmak üzere  $A$  matrisinin öz değerlerini ve öz vektörlerini bulalım. Bunun için

$$\det(A - t.I_3) = 0$$

ve dolayısıyla

$$\begin{vmatrix} 1-t & 0 & -1 \\ 1 & 2-t & 1 \\ 2 & 2 & 3-t \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow t^3 - 6t^2 + 11t - 6 = 0$$

olduğundan  $A$  matrisinin  $t_1 = 1$ ,  $t_2 = 2$  ve  $t_3 = 3$  şeklinde öz değerleri elde edilir.  $A$  matrisinin her bir öz değerine karşılık gelen öz vektörler

$$A\alpha = t_i\alpha, \quad i = 1, 2, 3,$$

ya da

$$(A - t_i I_3) \alpha = 0$$

denklemi ile bulunur. Buna göre

- $t_1 = 1$  için,  $\alpha = (x, y, z)$  olmak üzere

$$\left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

veya

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

homojen lineer denklem sistemi bulunur. Bu sistemin ilaveli katsayılar matrisi ve ona denk olan matris

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & \vdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 2 & 2 & 2 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \varepsilon_1: \alpha_1 \leftrightarrow \alpha_3 \\ \varepsilon_2: \alpha_3 \rightarrow -1\alpha_3 \\ \varepsilon_3: \alpha_1 \rightarrow \frac{1}{2}\alpha_1 \end{matrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \varepsilon_4: \alpha_2 \rightarrow \alpha_2 - \alpha_1 \\ \varepsilon_5: \alpha_1 \rightarrow \alpha_1 - \alpha_3 \end{matrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

bulunur. Buna göre  $z = 0$  ve  $y = s$  denirse  $x = -s$  olur. Buna göre

$$\alpha = \begin{bmatrix} -s \\ s \\ 0 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$O$  halde  $c_1$  öz değerine karşılık gelen öz vektörlerin kümesi

$$\left\{ s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\} = Sp \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

olur.

- $t_2 = 2$  için  $\beta = (u, v, w)$  olmak üzere

$$\left( \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

veya

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

homojen lineer denklem sistemi bulunur. Bu sistemin ilaveli katsayılar matrisi ve ona denk olan matris

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & : & 0 \\ 1 & 0 & 1 & : & 0 \\ 2 & 2 & 1 & : & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \varepsilon_1: \alpha_1 \rightarrow -1\alpha_1 \\ \varepsilon_2: \alpha_2 \rightarrow \alpha_2 + \alpha_1 \\ \varepsilon_3: \alpha_3 \rightarrow \alpha_3 + 2\alpha_1 \end{matrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \\ 0 & 2 & 1 & : & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \varepsilon_4: \alpha_2 \leftrightarrow \alpha_3 \\ \varepsilon_5: \alpha_2 \rightarrow \frac{1}{2}\alpha_2 \end{matrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & : & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{bmatrix}$$

bulunur. Buna göre  $w = 2s$  denirse  $v = -s$  ve  $u = -2s$  olur. Buna göre

$$\beta = \begin{bmatrix} -2s \\ -s \\ 2s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

O halde  $t_2$  öz değerine karşılık gelen öz vektörlerin kümesi

$$\left\{ s \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\} = Sp \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

olur.

- $t_3 = 3$  için  $\gamma = (p, q, r)$  olmak üzere

$$\left( \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

veya

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

homojen lineer denklem sistemi bulunur. Bu sistemin ilaveli katsayılar matrisi ve ona denk olan matris

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 & : & 0 \\ 1 & -1 & 1 & : & 0 \\ 2 & 2 & 0 & : & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} \varepsilon_2: \alpha_2 \rightarrow \alpha_2 + 2\alpha_1 \\ \varepsilon_3: \alpha_3 \rightarrow \alpha_3 + \alpha_2 \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} \varepsilon_1: \alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2 \\ \approx \end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & : & 0 \\ 0 & -2 & 1 & : & 0 \\ 2 & 0 & 1 & : & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\approx]{\begin{smallmatrix} \varepsilon_4: \alpha_2 \rightarrow \frac{-1}{2}\alpha_2 \\ \varepsilon_5: \alpha_3 \rightarrow \alpha_3 - 2\alpha_1 \end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & : & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} & : & 0 \\ 0 & 2 & -1 & : & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\varepsilon_5: \alpha_3 \rightarrow \alpha_3 - 2\alpha_3]{\begin{smallmatrix} \varepsilon_4: \alpha_1 \rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 \\ \approx \end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & : & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{pmatrix}$$

bulunur. Buna göre  $r = 2s$  denirse  $q = s$  ve  $p = -s$  olur. Buna göre

$$\beta = \begin{pmatrix} -s \\ s \\ 2s \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

O halde  $c_2$  öz değerine karşılık gelen öz vektörlerin kümesi

$$\left\{ s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\} = Sp \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

olur.

**Tanım 3.4.26** Bir  $n \times n$  tipinde  $A$  matrisi için  $\det(A - t.I_n)$  determinantına  $A$  nın **karakteristik polinomu** ( $t$  cinsinden),  $\det(A - t.I_n) = 0$  denklemine ise  $A$  nın **karakteristik denklemi** adı verilir.

**Örnek 3.4.27**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

verilsin. O zaman  $A$  nın karakteristik polinomu

$$\det(A - tI_2) = \begin{vmatrix} 2-t & -1 \\ 0 & 1-t \end{vmatrix} = t^2 - 3t + 2$$

ve karakteristik denklemi

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

şeklindedir.

**Örnek 3.4.28**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

verilsin. O zaman  $A$  nın karakteristik polinomu

$$\det(A - tI_3) = \begin{vmatrix} 1-t & 2 & -1 \\ 1 & -t & 1 \\ 4 & -4 & 5-t \end{vmatrix} = t^3 - 6t^2 + 11t - 6$$

ve karakteristik denklemi

$$t^3 - 6t^2 + 11t - 6 = 0$$

şeklindedir.

**Teorem 3.4.29**  $A$ ,  $n \times n$  tipinde bir matris olsun.  $A$  nın öz değerleri  $A$  nın karakteristik polinomunun reel kökleridir.

**Teorem 3.4.30 (Cayley-Hamilton)** Her matris kendi karakteristik polinomunun bir köküdür. Açık bir ifadeyle bir  $A$  kare matrisinin karakteristik polinomu

$$p_A(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_1t + a_0$$

ise  $p_A(A) = 0$  dir, yani

$$p_A(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1A + a_0I_n = 0_n$$

dir.

**Uyarı 3.4.31** Genel olarak

$$p_A(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_1t + a_0$$

$n$ . mertebeden bir  $A$  kare matrisinin karakteristik polinomu ise

$$A^{-1} = \frac{-1}{a_0} (A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \dots + a_2A + a_1I_n)$$

formülü ile  $A^{-1}$  bulunabilir.

**Örnek 3.4.32**

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$

matrisinin tersini Cayley-Hamilton teoremini kullanarak bulalım. Buna göre karakteristik polinom

$$\det(A - tI_2) = \begin{vmatrix} 3-t & 5 \\ 2 & 7-t \end{vmatrix} = t^2 - 10t + 11$$

şeklindedir. Dolayısıyla  $A$  matrisi bu polinomun bir köküdür

$$A^2 - 10A + 11I_2 = 0_2$$

ve

$$A^{-1} = \frac{-1}{11} (A - 10I_2) = \frac{-1}{11} \begin{bmatrix} 3-10 & 5 \\ 2 & 7-10 \end{bmatrix}$$

olduğundan

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{11} & \frac{-5}{11} \\ \frac{-2}{11} & \frac{3}{11} \end{bmatrix}$$

elde edilir.

## 3.4.4 Bölüm sonu alıştırmaları

1.  $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $L(x, y) = 3x + 2y$  dönüşümünün lineer olduğunu gösteriniz.
2.  $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $L(x, y, z) = (z - x, y, 2x)$  dönüşümünün lineer olduğunu gösteriniz.
3.  $\mathbb{V}$  ve  $\mathbb{W}$  reel (ya da kompleks) vektör uzayları ve  $L : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$  dönüşümü için eğer  $L(0) \neq 0$  olursa  $L$  lineer bir dönüşüm olabilir mi?
4.  $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $L(x, y, z) = (x, y, 0)$  dönüşümünün lineer olduğunu gösteriniz. Bu dönüşümü geometrik olarak yorumlayınız.
5. Düzlemin her bir noktasını  $O$  noktası etrafında  $\theta$  radyan dündüren

$$L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, L(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$$

dönüşümünün lineer olduğunu gösteriniz.

6.  $A \in \mathbb{R}_n^n$  ve  $L : \mathbb{R}_n^n \longrightarrow \mathbb{R}_n^n$  için  $L(X) = AX$  fonksiyonunun lineer olduğunu gösteriniz.
7.  $L : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ ,

$$L(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_3, x_2 + x_4, x_1 - x_4, x_2 - x_3, x_1 - x_2)$$

şeklinde tanımlanan  $L$  lineer dönüşümü verilsin.  $(1, 1, 0, 0, -1)$  vektörü  $L$  nin görüntü uzayı içerisinde midir?

8.  $L : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  lineer dönüşümü

$$L(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 + 2x_3 - 2x_4, x_1 + x_3 + x_4, -x_1 + x_2 - 2x_4)$$

şeklinde tanımlansın.  $L(\mathbb{R}^4)$  altuzayını elde edip boyutunu bulunuz.

9.  $L : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  lineer dönüşümü

$$L(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + 2x_4, x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4, x_2 - x_3 + x_4)$$

şeklinde tanımlansın.  $L(\mathbb{R}^4)$  altuzayını elde edip boyutunu bulunuz.

10.  $L_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $L(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  olacak şekilde verilen  $L_i$  dönüşümünün lineer olduğunu gösteriniz. ( $L_i$  dönüşümüne  $i$  nci koordinat fonksiyonu da denilmektedir.)

11. Aşağıda verilen lineer dönüşümlerin rankını bulunuz:

(a)  $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $L(x, y, z) = (2x - z, x - 3y)$ ;

(b)  $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $L(x, y) = (x - y, 2x, x + y)$ ;

(c)  $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $L(x, y, z) = (x - y, x + y, 0)$ .

12.  $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $L(x, y) = (6x + y, 4x - 2y, -4x)$  şeklinde tanımlı  $L$  lineer dönüşümü verilsin.  $\mathbb{R}^2$  nin  $\mathbb{S}_{\mathbb{R}^2} = \{(1, 1), (0, 1)\}$  ve  $\mathbb{R}^3$  ün  $\mathbb{S}_{\mathbb{R}^3} = \{(-1, 0, 1), (1, 0, 1), (3, 2, 0)\}$  bazlarına göre  $L$  dönüşümüne karşılık gelen matrisi bulunuz.

13.  $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $L(x, y, z) = (2x - z, x - 3y)$  şeklinde tanımlı  $L$  lineer dönüşümü verilsin.  $\mathbb{R}^3$  ün  $\mathbb{S}_{\mathbb{R}^3} = \{(1, -1, 0), (0, -1, 0), (0, 1, 2)\}$  ve  $\mathbb{R}^2$  nin  $\mathbb{S}_{\mathbb{R}^2} = \{(2, 5), (1, 2)\}$  bazlarına göre  $L$  dönüşümüne karşılık gelen matrisi bulunuz.

14.  $\mathbb{R}^3$  standart reel vektör uzayının  $\mathbb{S}_{\mathbb{R}^3} = \{(1, 1, 0), (0, -1, 0), (0, 0, 2)\}$  ve  $\mathbb{R}^2$  vektör uzayının  $\mathbb{S}_{\mathbb{R}^2} = \{(0, -1), (3, 0)\}$  bazları verilsin. Buna göre

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

için  $\mathbb{S}_{\mathbb{R}^3}$  ve  $\mathbb{S}_{\mathbb{R}^2}$  bazlarına göre  $A$  matrisinin belirttiği lineer dönüşümü bulunuz.

15.  $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $L(x, y) = (-x + y, x - 2y, -3x)$  lineer dönüşümü verilsin.

(a)  $\alpha = (-1, 2)$  için  $L(\alpha)$  vektörünü bulunuz.

(b)  $\mathbb{S}_{\mathbb{R}^2} = \{(2, 1), (3, 1)\}$  ve  $\mathbb{S}_{\mathbb{R}^3} = \{(1, 1, 1), (-1, 0, -1), (1, 1, 2)\}$  bazlarına göre  $L$  nin matrisini bulunuz.

(c)  $\alpha$  vektörünün  $\mathbb{S}_{\mathbb{R}^2}$  bazına göre bileşenlerinin matrisini bulunuz.



16.

$$A = \begin{bmatrix} -10 & 14 \\ -7 & 11 \end{bmatrix}$$

matrisinin öz değerlerini ve öz vektörlerini hesaplayınız.

17.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

matrisinin öz değerlerini ve öz vektörlerini hesaplayınız.

18.  $A$ ,  $2 \times 2$  tipinde bir matris olsun.  $A$  nın karakteristik polinomu  $p_A$  olmak üzere

$$p_A(t) = t^2 - \text{İz}(A)t + \det A$$

olduğunu gösteriniz.

19.  $A$ ,  $3 \times 3$  tipinde bir matris olsun.  $A$  nın karakteristik polinomu  $p_A$  olmak üzere

$$p_A(t) = t^3 - \text{İz}(A)t^2 + \text{İz}(\text{adj}A)t + \det A$$

olduğunu gösteriniz.